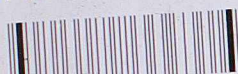




PD 11731



003085337

COBISS ©

**UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET
INSTITUT ZA GEODEZIJU**

SLOBODAN AŠANIN

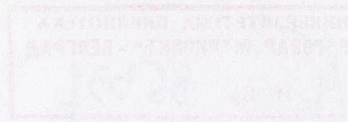
**PRILOG OBRADI I ANALIZI GEODETSKIH
MERENJA ZA ODREĐIVANJE POMERANJA
I DEFORMACIJA OBJEKATA I TLA**

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

**BEOGRAD
1986**

РД 11731

12



UNIVERZITET U BEOGRADU
GRADJEVINSKI FAKULTET
INSTITUT ZA GEODEZIJU

Mr. SLOBODAN AŠANIN, dipl.inž.

PRILOG OBRADI I ANALIZI GEODETSKIH MERENJA ZA
ODREĐJIVANJE POMERANJA I DEFORMACIJA OBJEKTA I TLA

DOKTORSKA DISERTACIJA

BEOGRAD

1986

P R E D G O V O R

Inženjerski objekti, delo neumornih neimara podložni su promenama. Ispitivanje pomeranja i deformacija objekata je ozbiljan i veoma odgovoran posao.

Svestrano izučavanje široke lepeze dodirnih naučnih oblasti nameće se pred svakim naučnikom - stručnjakom kao neophodnost.

Ovaj rad je nastao kao rezultat višegodišnjeg rada autora na izučavanju problematike koja je povezana sa ispitivanjem, i analizom pomeranja i deformacija inženjerskih objekata i tla. U tom periodu analizirano je više desetaka inženjerskih objekata i tla.

Kao rezultat ovih istraživanja rodila se ideja o novoj metodi analize pomeranja i deformacija objekata i tla, koja je pored ostalih prezentirana u ovom radu.

Autor se zahvaljuje Prof. dr Aleksandru Begoviću na pomoći koju mu je, u vidu konsultacija pružio pri izradi disertacije.

Prilikom izrade ovog rada autor je imao i nesebičnu pomoć i podršku od strane Doc. dr Gligorija Perovića, na čemu mu se ovom prilikom posebno zahvaljuje.

S. Ašanin

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1.1 Značaj merenja deformacija inženjerskih objekata	1
1.2 Metode odredjivanje pomeranja i deformacija objekata	2
1.3 Definisanje problema	3
1.4 Značaj geodetske kontrolne mreže za odredjivanje deformacija	4
1.5 Metode geodetskih deformacionih merenja	4
2. GEODETSKE MREŽE ZA DEFORMACIONA MERENJA	6
2.1 Uopšte o kontrolnim mrežama	6
2.2 Uticaj karakteristika objekta na geometriju kontrolne mreže	7
2.3 Definisanje tačnosti odredjivanja pomeranja i deformacije objekta	7
2.4 Proračun tačnosti merenja elementarnih veličina (apriorna tačnost)	7
2.5 Optimizacija procesa merenja na objektu i tlu	8
2.7 Izbor mesta za osnovne tačke	8
2.8 Stabilizacija i signalisanje tačaka	9
2.9 Analiza snage (moći) geodetskih kontrolnih mreža	10
2.9.1 Analiza snage (moći) geodetske kontrolne mreže pomoću STRAIN analize	10
2.10 Tačnost i pouzdanost kontrolnih mreža	16
2.10.1 Tačnost mreža	16
2.10.2 Pouzdanost mreža	19
2.10.2.1 Spoljna tačnost kao globalni kriterijum pouzdanosti	20
2.10.2.2 Otkrivanje grubih grešaka	21
2.10.2.3 Uticaj grubih grešaka na ocene koordinata tačaka	22
2.11 Izravnjanje slobodnih mreža i S-transformacija	23
2.11.1 Datum	23
2.11.2 Defekt ranga	24
2.11.2.1 Defekt datuma	25
2.11.2.2 Defekt konfiguracije	25
2.11.3 Invarijante i ocenljive veličine	26
2.11.4 Klasično izravnjanje	26
2.11.5 Uopštena inverzija	27
2.11.6 Pseudoinverzija	28
2.11.7 S-transformacija	29
2.12 Testiranje hipoteza	39

3. SADAŠNJE STANJE I ZADACI ANALIZE GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA	49
4. POSTOJEĆE METODE (POSTUPCI)	51
4.1 Pelcerov (Pelzer) postupak	51
4.1.1 Izravnjanje pojedinih serija	51
4.1.2 Globalni test podudarnosti mreže	55
4.1.3 Globalni test za ispitivanje stabilnosti osnovnih tačaka	57
4.1.4 Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka	58
4.1.5 Ispitivanje pomeranja tačaka na objektu	60
4.2 Velšov (Welsch) postupak	61
4.2.1 Homogene deformacije (STRAIN)	62
4.2.2 Izravnjanje mreže	69
4.2.3 Globalni test	69
4.2.4 Analiza konačnih elemenata	71
4.2.5 Analiza pomeranja pojedinačnih tačaka	74
4.3 Delft postupak	75
4.3.1 Testiranje opažanja	75
4.3.2 Ispitivanje globalne podudarnosti	78
4.3.3 Ispitivanje pomeranja pojedinih tačaka	78
4.3.4 Testiranje modela deformacija	80
4.4 Frederikton postupak	80
4.4.1 Izravnjanje mreže	81
4.4.2 Identifikacija mogućih modela deformacija	81
4.4.3 Ocena parametara deformacije	84
4.4.4 Kontrolisanje modela deformacija i izbor "najboljeg" modela	86
4.5 Karlsruhe postupak	87
4.5.1. Odredjivanje težina i kontrolisano odbacivanje opažanja sa grubim greškama	87
4.5.2 Statističko testiranje unutrašnje stabilnosti dela mreže	88
4.5.3 Statističko testiranje stabilnosti tačaka na objektu i nestabilnih tačaka	90
5. UPOREDNI PREGLED I ZAKLJUČCI O POSTOJEĆIM POSTUPCIMA	93
6. NOVI POSTUPAK ANALIZE GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA	95
6.1. Suština postupka	95
6.2. Postupak ispitivanja podudarnosti mreže u svim kombinacijama	96

6.3. Testiranje rezultata merenja	100
6.3.1. Testiranje normalnosti	100
6.3.2. Testiranje homogenosti tačnosti	103
6.3.3. Testiranje korelisanosti rezultata merenja	105
6.3.4. Testiranje grubih grešaka	107
6.4. Izravnanje rezultata merenja	110
6.5. Testiranje podudarnosti mreža	116
6.5.1. Izbor test veličina	116
6.5.2. Testiranje podudarnosti stabilnih tačaka	117
6.6. Odredjivanje pomeranja tačaka na objektu	122
6.7. Zaključci u vezi sa novim postupkom	122
7. PRAKTIČNI PRIMERI	124
7.1. Primena na simuliranu mrežu	124
7.1.1. Opis mreže	124
7.1.2. Rezultati testiranja	125
7.1.3. Uporedjenje moći postupaka	127
8. ZAKLJUČCI	138
L I T E R A T U R A	140

1. UVOD

1.1. ZNAČAJ MERENJA DEFORMACIJA INŽENJERSKIH OBJEKATA

Inženjerski objekti (brane, termoelektrane, mostovi, mašinska postrojenja, visoke zgrade i drugi objekti) kao i tlo na kome su izgradjeni objekti nalaze se pod stalnim dejstvom raznih privremenih i stalnih spoljnih i unutrašnjih uticaja. Ovi uticaji nastaju od opterećenja od sopstvene težine objekta, težine pokretnih tereta, fizičke osobine tla, vetra, vode, temperaturne promene, promene nivoa podzemnih voda, recentnih pomeranja zemljine kore, zemljotresa, klizišta i dr. Reakcije objekta i tla, njihovo ponašanje, na spoljne uticaje proračunavaju se u projektu objekta. Ovo je neophodno radi izbora najbolje konstrukcije i materijala koji će omogućiti da objekat može da se odupre spoljnim opterećenjima i da se pouzdano eksploatiše. Izbor konstrukcije i materijala zavisi od namene, vrste i veličine objekta, vrste i osobine tla, uzajamne reakcije objekta i tla, kao i od proračunatih deformacija na spoljna opterećenja.

Nije teško pretpostaviti do kakvih posledica može doći ako se izgradjeni objekat (prema projektu), posle puštanja u eksploataciju, ostavi bez daljeg nadzora. Oštećenja objekta usled pomeranja i deformacije objekta, (na pr. kod brana), mogu prouzrokovati materijalnu štetu i ljudske žrtve. Zato je od velikog značaja za konstruktora, statičara, arhitektu, geomehaničara, mašinka i dr. da saznaju kako se objekat ponaša, da li postoje pomeranja i deformacije pod dejstvom spoljnih sila i kako objekat podnosi takvo opterećenje.

Rezultati ispitivanja ponašanja inženjerskih objekata i tla, bilo u fazi gradjenja, bilo u probnom pogonu, ili u toku proizvodnog procesa i posle izvedenih sanacija i adaptacija, pružaju projektantima dokaze ispravnosti učinjenih projektnih pretpostavki i o kvalitetu gradjenja i organizaciji eksploatacije. Ovi podaci su istovremeno pouzdani pokazatelji stanja ispitivanog objekta u sklopu mera bezbednosti, naročito posle pojava koje ugrožavaju stabilnost kao što su zemljotresi, poplave, klizišta i dr.

Poznato je da se lomovi i rušenja objekta ne dešavaju iznenada (izuzetno u slučaju zemljotresa i poplava) zbog elastičnosti materijala, već se najavljuju manjim ili većim pomeranjima i deformacijama objekta ili njegovih delova. Ova pomeranja i deformacije objekta, ili njegovih delova, prouzrokuju naprezanja u objektu. Da bi se ustanovio stepen naprezanja u objektu, a samim tim i pomeranje i deformacija objekta nužno je sprovesti ispitivanje ponašanja

objekta.

1.2. METODE ODREĐJIVANJA POMERANJA I DEFORMACIJA OBJEKTA

Metode za ispitivanje ponašanja objekta, određivanje pomeranja i deformacije, mogu se podeliti u dve grupe: negeodetske i geodetske.

Negeodetskim metodama mere se pomeranja i lokalne deformacije specijalno konstruisanim instrumentima koji se ugrađuju na objektu ili u njemu. Instrumenti koje koriste ove metode su: tenzometri, deformetri (za merenje lokalnih deformacija); ugibometri i klinometri (za merenje ugiba i nagiba - pomeranja); viskovi (za određivanje pomeranja) i dr. Ovi instrumenti pomeraju se u prostoru zajedno sa objektom. Slabost negeodetskih metoda jeste u tome što utvrđuju samo relativna pomeranja objekta, ali ne i apsolutna - pomeranja u odnosu na okolno tlo, t.j. određuju samo relativna pomeranja u okviru objekta i lokalne deformacije u objektu.

Za razliku od negeodetskih metoda, geodetskim metodama se osim relativnih pomeranja i deformacija određuju i apsolutna pomeranja objekta u odnosu na tačke van objekta t.j. pomeranje objekta u odnosu na okolno stabilno tlo. Geodetske metode u mnogim slučajevima su u prednosti u odnosu na negeodetske, zbog mogućnosti određivanja apsolutnih veličina pomeranja opažanih tačaka na objektu. U nekim slučajevima, na pr. kod brana, treba kombinovati obe metode. U odnosu na negeodetske, geodetske metode iziskuju veće troškove i više vremena za merenje jer se obično zahteva visoka tačnost određivanja veličina pomeranja i deformacija objekta.

U ovom radu predmet razmatranja su samo geodetske metode.

Razvoj u oblasti ispitivanja stabilnosti tla i objekta danas se odvija u dva pravca. Jedan pravac usmeren je na ispitivanja stabilnosti u mikrolokacijama, t.j. na ispitivanje stabilnosti tla i inženjerskog objekta, zbog kontakta objekta i tla i uzajamnih reakcija sa posledicama pomeranja i deformacija jedne i druge sredine. Razvoj ispitivanja u drugom pravcu ide na pomeranja i deformacije većih površi zemlje (celih regiona, pokrajina i šire) koje zahvataju i inženjerske objekte, a posledica su konsolidacije zemljine kore.

Predmet razmatranja u ovom radu su ispitivanja i deformacije koje stoje u vezi sa inženjerskim objektima i tlom s kojim su ovi objekti u vezi.

Izgradnjom brana stvaraju se velika veštačka jezera, formira se ogromna vodena masa koja deluje na obale. U rudarskim radovima iz postojećeg uravnoteženog tla vade se delovi tla kao ruda ili jalovina površinskom ili podzemnom eksploatacijom. Pri površinskoj eksploataciji skidaju se i premeštaju velike

mase jalovine, a pri podzemnoj slabe oslonci površinskih slojeva. Takvi radovi (veštačka jezera i rudnici) utiču u širem smislu na stabilnost tla i iniciraju pojave kao što je mikroseizmika. U svim regionima u Jugoslaviji gde intervencijom ljudi u tlu može biti poremećena prirodna ravnoteža zemljišta treba formirati geodinamičke poligone. Kod nas ispitivanja tla ove vrste praktično su u početnoj fazi.

Rezultati ispitivanja pomeranja i deformacija tla i objekta pored praktičnog značaja, služe i u naučne svrhe za izučavanje novih projektnih rešenja objekta, za odredjivanje pojedinih parametara u teoriji matematičnog modeliranja pojava i teoriji mehanike stena i pritisaka tla, istraživanju o recentnom pomeranju zemljine kore, istraživanju ponašanja tla u oblasti rudnika, istraživanju ponašanja obala veštačkih jezera i prirodnih vodotoka itd.

1.3. DEFINISANJE PROBLEMA

Kao što je poznato u Geodeziji, za odredjivanje koordinata tačaka, postoje metode za odredjivanje vertikalnih, horizontalnih i prostornih položaja tačaka. Analog je slučaj pri ispitivanju pomeranja i deformacija. Horizontalna pomeranja odredjuju se pomoću kontrolne geodetske mreže: triangulacije, poligonometrije i alinjmana. Vertikalna pomeranja odredjuju se pomoću visinske kontrolne mreže: geometrijskog nivelmana, trigonometrijskog nivelmana i hidrostatskog nivelmana. Prostorna pomeranja odredjuju se pomoću trodimenzionalnih mreža i fotogrametrije. Uža problematika ovog rada odnosi se na kontrolne geodetske mreže u rani XOY (i pomeranja u ovoj projektnoj ravni).

Radi praćenja ponašanja objekta i tla, geodetskim metodama, ispitivani objekat i tlo generališu se pomoću karakterističnih tačaka koje se nazivaju *tačke-marke*. U blizini ispitivanog objekta ili tla, ali van zone deformacija, vrši se u saradnji sa Geologom, izbor položaja za *osnovne geodetske tačke*. Tačke na objektu i osnovne tačke sačinjavaju jednu *kontrolnu mrežu*. Uzajamni položaj tačaka geodetske kontrolne mreže odredjuje se početnim (nultim) premeravanjem mreže (uglovi, pravci, dužine, direkcioni uglovi, visinske razlike). U pogodnom vremenskom trenutku mreža se ponovo premerava (tekuća serija). Poželjno je, da u svim serijama merenja bude isti plan opažanja, isti instrumenti, i iste metode merenja; u protivnom mogu se pojaviti sistematske greške i oscilacije tačnosti merenih veličina. Pomeranja tačaka, a samim tim i ponašanje objekta (pomeranje i deformacija) dobijaju se kao razlike izravnatih koordinata tačaka dobijenih posle ispitivanja podudarnosti (kongruencije) tačaka mreže i utvrđivanja stabilnosti osnovnih tačaka.

1.4. ZNAČAJ GEODETSKE KONTROLNE MREŽE ZA ODREĐJIVANJE DEFORMACIJA

Tačnost izravnatih koordinata tačaka zavisi od tačnosti merenja, kvaliteta mreže i načina izravnanja mreže. Kod izravnanja mreže po metodi posrednih merenja mora biti definisan neki koordinatni sistem. Za mreže u ravni xOy (ravanske mreže) elementi za definisanje koordinatnog sistema, zvani DATUM (kao što je poznato) su: dva parametra za definisanje koordinatnog početka - dve translacije, jedan parametar za definisanje orijentacije i jedan parametar za definisanje razmere. Definisanje DATUMA daje regularne normalne jednačine, u protivnom, ako se ne definiše DATUM normalne jednačine su singularne i imaju defekt 2, ili 3, ili 4-u zavisnosti od toga koje su elementarne veličine (u mreži) merene. DATUM se može definisati na proizvoljni način, međjutim to ima uticaja na ocene nekih veličina i njihovu tačnost, zato je veoma važno ustanoviti koje su veličine u mreži invarijantne u odnosu na izabrani DATUM, odnosno koje veličine su ocenljive.

Kod geodetskih kontrolnih mreža, kao osnovni problemi pojavljuju se tačnost i pouzdanost mreža. U sadržaj jedne kompleksne analize mreža spada: ocena kvaliteta mreža, analiza njihove moći (snage), izbor DATUMA, utvrđjivanje ocenljivih veličina, metode izravnanja mreža, analiza metode merenja, proračun tačnosti elementarnih veličina, ispitivanje i eliminacija grubih i sistematskih grešaka, ispitivanje homogenosti merenja (u seriji i između serija), ispitivanje korelisanosti rezultata merenja i dr.

Stabilizacija tačaka predstavlja takodje jedan ozbiljan zadatak, ali i ozbiljan problem kod ovih mreža, o čemu se ovde neće detaljnije govoriti.

1.5. METODE ANALIZE GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA

Postoje razne metode (postupci) za analizu deformacija geodetskih mreža. Sve sadašnje metode u svetu zasnovane su na ispitivanju podudarnosti mreže između dve merne epohe. Ukoliko između dve serije merenja postoji pomeranje osnovnih tačaka, što se potvrđuje određenim testom - mreže nisu podudarne, i onda se sprovodi lokalizacija nastalih pomeranja. Tek posle eliminacije nestabilnih osnovnih tačaka i pronalaženja (ispitivanjem) stabilnih osnovnih tačaka mogu se odrediti pomeranja tačaka upasivanjem mreže sa stabilnim tačkama. Ovo

je potrebno zato što koordinate tačaka dobijene odvojenim izravnanjem mreže iz dve serije nisu u istom koordinatnom sistemu ako su se tačke koje definišu DATUM makar malo pomerile izmedju dve serije. Svi postupci analize koji ne ispituju podudarnost mreže izmedju dve serije mogu dati pogrešne rezultate o deformaciji objekta. Najmanja promena položaja tačaka, koje definišu koordinatni sistem, izmedju dve serije merenja utiču tako da se menjaju koordinate svih tačaka mreže. Zato je i neophodno ispitivanjem eliminisati nestabilne osnovne tačke i poklopiti mreže iz dve serije u stabilnim osnovnim tačkama radi dobijanja pomeranja nestabilnih osnovnih tačaka i tačaka na objektu. Poznati postupci [15], [16], [17], [19], [25], [27], [44], [52], [54], [70], [76], [77] i [79] imaju sličnosti, razlike i nedostatke o čemu će biti govora u glavi 4.

Dalja razmatranja imaju još za cilj da se prikažu poznati postupci u analizi geodetskih deformacionih merenja u svetu sa sličnostima i razlikama. Posle prikaza poznatih postupaka i utvrđivanja njihovih osobina predložen je novi postupak analize geodetskih deformacionih merenja.

U poglavlju 2. primeniće se najnovija saznanja o geodetskim mrežama na mreže tačaka za ispitivanje pomeranja i deformacije objekata i tla.

2. GEODETSKE MREŽE ZA DEFORMACIONA MERENJA

2.1. UOPŠTE O KONTROLNIM MREŽAMA

Geodetske mreže za određivanje pomeranja i deformacije objekta - geodetske kontrolne mreže moraju biti projektovane tako, da omoguće određivanje pomeranja i deformacije ispitivanog objekta i tla sa unapred zahtevanom (zadatom) tačnošću. Od većeg broja varijanti oblika mreže treba izabrati onu za čiju realizaciju su potrebni najmanji utrošci vremena i materijalnih sredstava a, da istovremeno mreža bude takva da omogući pouzdano određivanje pomeranja i deformacije objekta i sa zahtevanom tačnošću.

Kod projektovanja geodetskih kontrolnih mreža moraju se uzeti u obzir mnogi parametri kao što su:

- karakteristike objekta (vrsta, veličina, namena i lokacija objekta),
- tačnost određivanja položaja tačaka mreže ili tačnost određivanja pomeranja tačaka i deformacija objekta
- proračun tačnosti merenja elementarnih veličina
- optimizacija procesa merenja (izbor metode merenja i instrumenata, uslovi pri merenju, uslovi tačnosti merenja, kontrola i odabiranje rezultata merenja, ocena tačnosti rezultata merenja pre izravnjanja),
- položaji karakterističnih tačaka na objektu (generalizacija objekta)
- položaji (lokacija) za osnovne tačke
- stabilizacija i signalisanje tačaka,
- analiza snage (moći) mreže,
- tačnost i pouzdanost mreže (sistematske i grube greške),
- način izravnjanja kontrolne mreže (DATUM, defekt ranga i konfiguracije, ocenljive veličine, s-transformacija, klasično izravnjanje, ili izravnjanje sa minimalnim tragom),
- testiranje rezultata merenja (normalnost, homogenost, korelisanost grube i sistematske greške),
- testiranje hipoteza, i slično.

2.2. UTICAJ KARAKTERISTIKA OBJEKTA NA GEOMETRIJU KONTROLNE MREŽE

Kod projektovanja (geometrijskog oblika) geodetske mreže za određivanje pomeranja i deformacija objekta treba posebno voditi računa o karakteristikama objekta (vrsta, veličina, namena, lokacija i dr). Drugim rečima treba dobro proučiti dokumentaciju o projektovanju objekta, kakav je objekat, koje veličine, čemu je namenjen, gde se planira njegova izgradnja i na kakvom zemljištu, dinamika gradjenja i dr. Ako se ne povede računa o karakteristikama objekta biće učinjen veliki propust kod projektovanja mreže jer se u tom slučaju geodetska mreža ne može uspešno realizovati na terenu, ako nije podređena objektu i problemima ispitivanja njegovih deformacija.

2.3. DEFINISANJE TAČNOSTI ODREĐJIVANJA POMERANJA I DEFORMACIJE OBJEKTA

Tačnost određivanja pomeranja i deformacije objekta i tla je kod nekih objekata utvrđena propisima ili se utvrđuje dogovorom sa odgovarajućim stručnjakom (Gradjevinac, Mašinac i dr). Od tačnosti određivanja pomeranja zavisi tačnost merenja elementarnih veličina u mreži.

2.4. PRORAČUN TAČNOSTI MERENJA ELEMENTARNIH VELIČINA (APRIORNA TAČNOST)

Ovaj proračun se izvršava u cilju određivanja broja, vrste, rasporeda i tačnosti elementarnih veličina koje treba meriti, u nekoj od izabranih geometrija mreže, da bi se odredila pomeranja tačaka sa unapred zadatom tačnošću. Ako se ne dobije zadata tačnost tada treba ili tražiti bolju geometriju mreže ili uzimati (pretpostaviti) veću tačnost merenja elementarnih veličina. Proračun tačnosti se sprovodi sve dotle dok se za izabranu geometriju mreže i neku pretpostavljenu tačnost merenja elementarnih veličina, ne dobije rezultat da se pomeranja mogu odrediti sa unapred zadatom tačnošću.

Ako se ustanovi, posle sprovođenja optimizacije procesa merenja (2.5), da nije moguće postići pretpostavljenu (uzetu) tačnost merenja elemen-



tarnih veličina tada treba ponoviti proračun tačnosti i pokušati pronaći bolju geometriju mreže (promenom broja, vrste i rasporeda elementarnih veličina) radi dobijanja zadate tačnosti odredjivanja pomeranja. U protivnom treba konstatovati da nije moguće, sa postojećim instrumentima, poznatim metodama i mogućim uslovima pri merenju, postići zahtevanu tačnost odredjivanja elementarnih veličina (iako je tražena i pronadjena optimalna geometrija mreže).

2.5. OPTIMIZACIJA PROCESA MERENJA

Radi dobijanja tačnosti, koja je pretpostavljena kod proračuna tačnosti merenja elementarnih veličina (uglova, pravaca, dužina, azimuta) treba izvršiti optimizaciju procesa merenja. U tom cilju treba izabrati metode merenja, instrumente i pribor, uslove pri merenju (vreme, doba dana i dr), uslove tačnosti merenja radi kontrole i odabiranja rezultata merenja. Drugim rečima treba izabrati metodu, instrument i takve uslove da se merenjem dobije tačnost elementarnih veličina koja je pretpostavljena kod proračuna, a ne maksimalna moguća ili bilo koja druga tačnost.

Ako se ne može dobiti, optimizacijom procesa merenja, pretpostavljena tačnost merenja elementarnih veličina treba ponovo izvršiti proračun tačnosti (2.4) sa tačnošću merenja (elementarnih veličina) koju je moguće postići.

2.6. IZBOR KARAKTERISTIČNIH TAČAKA NA OBJEKTU I TLU

Tačke na objektu i tlu treba izabrati u saradnji sa odgovarajućim stručnjakom (gradjevincem, mašincem i dr). Ove tačke, čije se pomeranje određuje, treba izabrati tako da što bolje obuhvate pomeranje i deformaciju objekta. Drugim rečima tačke treba izabrati tako da što vernije opišu ponašanje objekta. Na objektu treba izabrati dovoljan broj tačaka tako da se odredjivanjem njihovih pomeranja upotpunosti opisuje pomeranje i deformacija objekta. Izbor ovih karakterističnih tačaka zavisi od vrste objekta i očekivanog pravca i vrste pomeranja objekta (ugib, nagib, savijanje, sleganje, uvrtnje i dr).

2.7. IZBOR MESTA ZA OSNOVNE TAČKE

Osnovne tačke se postavljaju van zone mogućih deformacija, izvan objekta i tla na koje objekat posle izgradnje može (prema izvršenim proračunima u projektu objekta) uticati, ali istovremeno i što bliže ispitivanom objektu i tlu zbog tačnosti odredjivanja pomeranja tačaka. Prilikom izbora mesta za osnovne tačke treba koristiti elaborat u kome su prikazani geološki i geomehanički podaci o ispitivanju tla za potrebe gradnje objekta (nosivost sastav, osobine, ponašanje tla pod opterećenjem i u različitim vremenskim i godišnjim uslovima). Mnogo je bolje, ako je to moguće, zajedno sa geologom na terenu izabrati mesta za osnovne tačke. Veoma je važno da se izaberu takva mesta da osnovne tačke budu stabilne što duži vremenski period (bar dok traje proces ispitivanja objekta i tla). Analiza geodetskih deformacionih meranja zasniva se na dovoljnom broju (tri i više) stabilnih tačaka izvan ispitivanog objekta i tla. Kada se govori o potrebnom broju stabilnih tačaka treba voditi računa o ukupnom broju osnovnih tačaka koje se postavljaju na "stabilnom" tlu. A u slučaju da jedna po jedna stabilna tačka, iz serije u seriju, postaje nestabilna treba na vreme preduzeti potrebne korake da se pronadju mesta za nove stabilne tačke; ovo sve u cilju očuvanja kontinuiteta u osmatranju objekta.

2.8. STABILIZACIJA I SIGNALISANJE TAČAKA

S obzirom da osnovne tačke treba da budu stabilne duži vremenski period to osim izbora pogodnog mesta za te tačke treba obezbediti njihovu sigurnu stabilizaciju. Stabilizacija se izvršava u saradnji sa stručnjacima određenih struka. Od geoloških osobina tla zavisi izbor vrste konstrukcije stuba za stabilizaciju tačke. Treba odrediti konzistentni sloj tla na razne uticaje. Izborom odgovarajućeg stuba obezbedjuje se sigurna i trajna stabilizacija. Stubove treba zaštititi od toplotnog uticaja sunca, smrzavanja i mehaničkih oštećenja (beli premaz bolja marka betona ili izolacija). Stabilnost stuba treba kontrolisati ugradnjom repera u ploču oko stuba. Stubove treba blagovremeno izgraditi da bi mogli da se konsoliduju.

Tačke na objektu, pošto obično nisu stanice, treba tako stabilizovati da se ne remeti fasada objekta. Uobičajeno je da se koriste bolcne s rupicom za postavljenje signala odgovarajuće debljine s obzirom na uvećanje durbina i dužine vizura. Ovi signali se postavljaju i na stubove. U nekim slučajevima kao signal koriste se poligonometrijske markice. Na stubove se ugradjuju

uredjaji za prisilno centrisanje.

2.9. ANALIZA SNAGE (MOĆI) GEODETSKIH KONTROLNIH MREŽA

Kada su u pitanju kontrolne mreže tačaka za ispitivanje stabilnosti objekata, zbog specifičnosti ovih mreža u pogledu namene i terenskih mogućnosti za njihovo projektovanje analizi snage mreže se ovde posvećuje posebna pažnja.

Sa tehnološkim napretkom u tehnikama merenja i povećanim zahtevima korisnika nameće se potreba za pouzdanijim mrežama. Geodetska merenja izvršena u različitim vremenskim trenutcima, bez obzira sa koliko pažnje bila sprovedena, imaju različite vrednosti. Ove razlike nastaju zbog neizbežnih grešaka pri merenju. Potrebno je ispitati kako ove promene, u vrednostima opažanja, deluju na postojeću mrežu. I ne samo to nego, obuhvatnije, kako promena brojne vrednosti, broja, vrste, rasporeda i tačnosti opažanih veličina deluje na mrežu. Drugim rečima, treba analizirati snagu mreže. Pod snagom (STRENGTH) mreže podrazumeva se njena sposobnost da se odupre promenama. Nije dovoljno ispitati koliko je snažna mreža nego i raspodelu snage mreže i da li je mreža jednako snažna na svim delovima.

Postoje razne metode za analizu snage mreže. Metode bazirane na slučajnim greškama koriste apsolutne i relativne elipse grešaka, standardna odstupanja izravnatih veličina (ugla, pravca, dužine, direkcionog ugla i dr.), sopstvene vrednosti i dr. Promenom broja i vrste merenih veličina (izostavljajući postojeća opažanja ili simulirajući nova) može biti ispitana promena elipsi, standardnih odstupanja, traga Q matrice i sopstvenih vrednosti. Na osnovu ovih promena analiziramo kvalitet mreže, t.j. od više mogućih oblika mreže usvajamo onaj najboljeg kvaliteta. Ove metode ne daju dovoljno informacija o snazi geodetske mreže. Sledeća metoda daje dovoljno informacija o snazi mreže.

2.9.1. Analiza snage (moći) geodetske kontrolne mreže pomoću STRAIN analize

Ovaj metod analize snage geodetske mreže baziran je na računanju strain matrice. Pojam STRAIN preuzet je iz teorije elastičnosti i ovde se koristi kao takav. Strain je elastična deformacija (dilatacija i smicanje) tela pod opterećenjem. Pod uticajem spoljnih sila (opterećenje) materijali i tela koja su napravljena od tih materijala deformišu se, menjaju svoj oblik i dimenzije. Pod dejstvom opterećenja javljaju se unutrašnji naponi (sile po jedinici

površine). Ako ovi naponi predju neku kritičnu vrednost nastaju plastične deformacije u materijalu i tlu, a zatim i lom. U Teoriji elastičnosti, Mehanici kontinuuma, Otpornosti materijala, Mehanici materijala, Analizi konstrukcija, Mehanici čvrstog tela i dr. davno su razvijene metode za analizu stanja napona i deformacija ([18], [67], [71], [80]). U poslednje vreme iste metode počele su se primenjivati i u Geodeziji [13], [17], [18], [76], [77], [78], [79]. Polazi se od pretpostavke da su pomeranja vrlo mala u odnosu na dimenzije tela, zato se koriste samo linearne relacije. Ovde će biti govora o infinitezimalnim deformacijama, jer je ova pretpostavka gotovo uvek ispunjena za materijale i konstrukcije u Gradjevinarstvu. Kako je ovo nova oblast koja se razmatra u svetu to će biti ovde detaljnije razmatrana.

U mreži koja se analizira za svaku tačku mreže, nazvaćemo je stanica koja je povezana merenom veličinom sa nekom drugom tačkom, (nazvaćemo je vezujuća stanica, mogu se napisati dve linearne jednačine oblika ([20])

$$\hat{V}_x = \frac{\partial V}{\partial x} x + \frac{\partial V}{\partial y} y + c \quad (2.9.1)$$

$$\hat{V}_y = \frac{\partial V}{\partial x} y + \frac{\partial V}{\partial y} y + d$$

gde su \hat{V}_x , \hat{V}_y pomeranja tačke koja se mogu dobiti kao razlike izravnatih koordinata u dve serije

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{elementi strain matrice}$$

c, d dve komponente koje nisu interesantne

x, y su razlike koordinata vezujuće stanice i stanice.

Jednačine (2.9.1) pišu se za svaku stanicu i za svaku vezujuću stanicu (koliko ima merenja sa jedne stanice na okolne vezujuće stanice toliko treba napisati jednačina (2.9.1) plus jedna za stanicu).

Jednačine (2.9.1) napisane u matričnom obliku glase

$$\begin{bmatrix} \hat{V}_x \\ \hat{V}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad (2.9.2)$$

Posle preuredjenja dobiće se



$$\begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial V_x / \partial x \\ \partial V_x / \partial y \\ c \\ \partial V_y / \partial x \\ \partial V_y / \partial y \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{V}_x \\ \hat{V}_y \end{bmatrix} \quad (2.9.3)$$

ili matricno

$$F \cdot E = \hat{\Delta x} \quad (2.9.4)$$

gde je $E^T = [\partial V_x / \partial x \quad \partial V_x / \partial y \quad c \quad \partial V_y / \partial x \quad \partial V_y / \partial y \quad d]$

$$F = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & y_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \hat{\Delta x} = \begin{bmatrix} \hat{V}_{x_1} \\ \hat{V}_{x_2} \\ \hat{V}_{x_3} \\ \hat{V}_{x_{st}} \\ \hat{V}_{y_1} \\ \hat{V}_{y_2} \\ \hat{V}_{y_3} \\ \hat{V}_{y_{st}} \end{bmatrix} \quad (2.9.5)$$

U jednačini (2.9.1) za neku stanicu koja ima tri vezujuće stanice (povezana je sa tri okolne stanice pomoću tri merene veličine) matrice F i $\hat{\Delta x}$ imaju $2K+2$ vrste, gde je k broj vezujućih stanica i imaju oblik (2.9.5) - $|20|$. Rešenjem jednačine (2.9.4) dobijaju se elementi strain matrice za svaku tačku

$$E = (F^T F)^{-1} F^T \hat{\Delta x} \quad (2.9.6)$$

Elementi matrice E nisu najpodesniji za kompletno opisivanje STRAIN-a. Za analizu snage praktičniji su izduženje (λ), okretanje (ω) i smicanje (γ). Osim ova tri parametra mogu još neki da budu izračunati pomoću elemenata strain matrice ($|20|$)

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) \quad - \text{rotacija (okretanje)}$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} - \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \quad - \text{čisto smicanje}$$

$$\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad - \text{prosto smicanje}$$

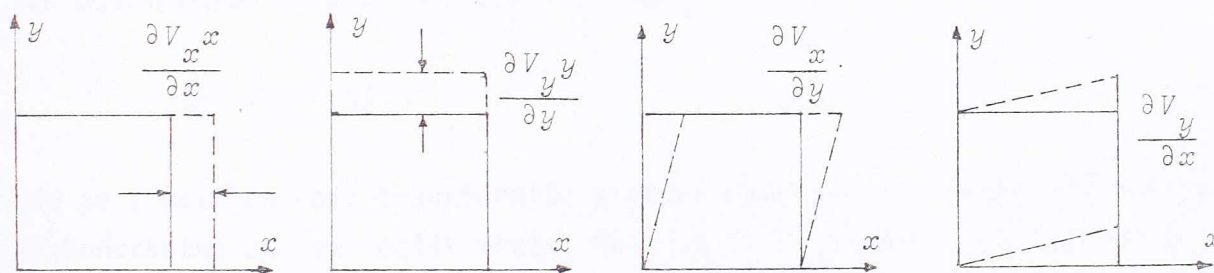
$$\sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \quad - \text{dilatacija}$$

$$\gamma = \sqrt{\tau^2 + \nu^2} \quad - \text{ukupno smicanje}$$

$$\alpha = \sigma + \gamma \quad - \text{velika poluosa strain elipse (glavni strain)}$$

$$\beta = \sigma - \gamma \quad - \text{mala poluosa strain elipse (glavni strain)}$$

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad - \text{ukupni strain}$$



Sl. 2.9.1 Delovanje elemenata strain matrice na figuri oblika kvadrata

Ukupni strain u tački pokazuje koliko mreža menja svoj oblik u susednim tačkama. Vrednost ω u tački pokazuje koliko se mreža okrenula (rotirala) u toj tački. Ukupno smicanje prouzrokuje deformaciju kvadrata u romb ili pravougaonik. Sila smicanja ne prouzrokuje rotaciju i ako ona može promeniti ugao između linija. Pravci α i β ukazuju na pravce u kojima nema smicanja.

Jednačine opažanja kod izravnjanja mreže metodom najmanjih kvadrata su

$$A \cdot x = l + v$$

(2.9.7)

gde su A - matrica konstantnih koeficijenata
 l - vektor opažanja
 x - vektor nepoznatih (priraštaj koordinata)

Po poznatom postupku je

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l \quad (2.9.8)$$

$$\text{ili } \hat{x} = T \cdot l \quad (2.9.9)$$

$$\text{gde je } T = (A^T P A)^{-1} A^T P \quad (2.9.10)$$

Ako je neko opažanje promenjeno za Δl , rezultat ove promene na ocenu \hat{x} dobiće se lako iz

$$(\hat{x} + \Delta x_i) = T(l + \Delta l) \quad \text{sa} \quad (2.9.11)$$

$$\Delta l^T = (0, 0, \dots, \Delta l_i, 0, \dots, 0), \quad (2.9.12)$$

jer oduzimanjem (2.9.9) od (2.9.11) sledi

$$\Delta x^i = T \cdot \Delta l, \quad (2.9.13)$$

gde je T matrica koja transformiše promene opažanja u promene koordinata, ona je konstantna za neki oblik mreže. Matrica T ima dimenzije $2n \times m$; n -broj tačaka koje nisu fiksirane, m je broj pravaca. Nema potrebe da se koristi cela matrica T već samo ona kolona koja odgovara promenjenom opažanju. Napr. neka mreža ima tri stanice i pet opažanja, i neka je promenjeno opažanje broj tri tada je

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{diagonal pattern} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Δx^3 T Δl
 $2n \times 1$ $2n \times m$ $m \times 1$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \tau'_3 \downarrow \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ s_3 \downarrow \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \\
 T \qquad (A^T P A)^{-1} \qquad A^T P
 \end{array}$$

Sl. 2.9.3

$$T'_i = (A^T P A)^{-1} \cdot s_i \quad (2.9.14)$$

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ s_3 \downarrow \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{array} \right] \\
 A^T P \qquad A^T \qquad P
 \end{array}$$

Sl. 2.9.4

Treća kolona matrice A^T pomnožena sa težinom opažanja daje vektor s_3 (kolona matrice $A^T P$), sada se primeni jednačina (14) i dobija se vektor T'_3 (kolona kompletne matrice T). Konačno jednačina za delimična pomeranja data je sa

$$\hat{\Delta x}^i = (A^T P A)^{-1} s_i \Delta l_i \quad (2.9.15)$$

gde je Δl_i vrednost promene u opažanju (u ovom primeru $i = 3$) i ekvivalentno je sa

$$\hat{\Delta x}^i = \Delta l_i T'_i \quad (2.9.16)$$

Pomeranja sadrže informacije o otpornosti mreže na promenu opažanja, ali su zavisna od translacije, rotacije i promene razmere. Medjutim parametri STRAIN-a ne zavise od transformacije iz jednog rešenja sa minimalnim ograničenjem u drugo. Moguće je direktno transformisati promenu opažanja u STRAIN po formuli

$$E = R \cdot \Delta l \quad (2.9.17)$$

Kako matrica T transformiše iz prostora opažanja u prostor pomeranja, a matrica Q iz prostora pomeranja u prostor straina, tada proizvod $Q \cdot T$ transformiše iz prostora opažanja u strain prostor direktno. Jednačina (2.9.6) može biti napisana u obliku

$$E = Q' \Delta x' \quad (2.9.18)$$

gde je

$$Q' = (F^T F)^{-1} F^T \quad (2.9.19)$$

Matrica Q može biti sastavljena za svaku stanicu mreže vodeći računa sa kojim je okolnim tačkama ta stanica povezana (opažanjima).

Za sastavljanje matrice F dovoljno je poznavati oblik mreže t.j. koordinate tačaka. Matrica Q za celu mrežu je

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i' \quad (2.9.20)$$

gde je Q_1' povezano sa stanicom 1, Q_2' sa stanicom 2 itd. Kada je poznato Q može se sračunati matrica R nazvana matrica odgovora. Matrica R govori koliko mreža odgovara na promene vrednosti opažanja.

2.10. TAČNOST I POUZDANOST KONTROLNIH MREŽA

Pomeranja tačaka i deformacija objekta određuju se iz razlika izravnatih koordinata tačaka dobijenih premeravanjem mreže u dva različita vremenska trenutka. Mreža koju sačinjavaju osnovne tačke i tačke na objektu treba da omogućiti dobijanje tačnih i pouzdanih pomeranja tačaka na objektu a samim tim i pomeranje i deformaciju objekta. Zato je i vrlo važno razmatrati tačnost i pouzdanost kontrolne mreže.

Poslednjih godina pojavilo se više radova u kojima se razmatra ova problematika [6], [21], [56], [57], [59], [60], [71].

2.10.1. Tačnost mreža

Tačnost jedne geodetske mreže raste sa povećanjem tačnosti rezultata merenja i broja suvišnih merenja. Osim toga tačnost mreže može se povećati boljom geometrijom (snagom) mreže.

Sa geometrijske tačke gledanja može se sračunati n -dimenzionalni eli-

ipsoid poverenja vektora ocena koordinata za unapred zadatu verovatnoću $1-\alpha(|21|)$

$$\Omega = (x - \hat{x})^T K_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (x - \hat{x}) \quad (2.10.1)$$

$$P(\Omega \leq \chi_{u, 1-\alpha}^2) = 1 - \alpha \quad (2.10.2)$$

gde su: x - vektor istinitih koordinata tačaka

\hat{x} - vektor ocena koordinata tačaka

$K_{\hat{x}\hat{x}}$ - kovarijaciona matrica ocena koordinata

$\chi_{u, 1-\alpha}^2$ - kritična vrednost χ_u^2 - raspodele

Može se za kriterijum postaviti zahtev da zapremina ove oblasti konfidence bude minimalna što vodi zahtevu $|21|$, $|59|$

$$\det(Q_{xx}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_u = \prod_{i=1}^u \lambda_i \rightarrow \min! \quad (2.10.3)$$

Može se dogoditi da zapremina bude minimalna a ipak osovina ostane relativno velika zato se uvodi zahtev da suma dužina osovina postane minimalna $|21|$, $|59|$

$$\text{trag}(Q_{xx}) = \sum_{i=1}^u \lambda_i \rightarrow \min! \quad (2.10.4)$$

U mnogim slučajevima koordinate tačaka su pomoćne veličine neke funkcije y , koja se može napisati posle linearizacije ($|59|$)

$$y = f^T x \quad (2.10.5)$$

Dalje je

$$\sigma_y^2 = \sigma_o^2 f^T Q_{xx} f \quad (2.10.6)$$

Vrlo važno je da se znaju granične vrednosti za standardnu devijaciju σ_y^2 koje se mogu dobiti iz nejednačine ($|59|$)

$$\lambda_{\min} \leq \frac{f^T Q_{xx} f}{f^T f} \leq \lambda_{\max} \quad (2.10.7)$$

gde je λ_{\min} i λ_{\max} : minimalna i maksimalna sopstvena vrednost od Q_{xx} ; $\lambda_{\min} > 0$. Granične vrednosti su

$$\sigma_o^2 f^T f \lambda_{\min} \leq \sigma_y^2 < \sigma_o^2 f^T f \lambda_{\max} \quad (2.10.8)$$

Ako je potrebna visoka tačnost neke funkcije od koordinata tačaka tada se uvo-
di zahtev (|59|)

$$\lambda_{max} \rightarrow \min! \quad (2.10.9)$$

što znači da je mreža utoliko tačnija ukoliko je manja maksimalna sopstvena
vrednost, tako se izbegavaju slabi pravci. Za mrežu je važna i homogenost i
izotropija. Mreža je homogena ako su sve elipse poverenja za mreže u ravni iste
veliçine, a izotropna ako su elipse poverenja jednake veliçine u svim pravcima,
dakle krugovi su. Za postizanje homogenosti i izotropije postavlja se uslov
(|21|)

$$\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \rightarrow 1 \quad (2.10.10)$$

što znači zahtev da sve sopstvene vrednosti od Q_{xx} budu iste veliçine. Uslov
(2.10.10) je mera približenja idealnom slučaju.

Za odredjivanje deformacija nisu dovoljni gore navedeni uslovi, jer
ravnomerna tačnost i visoka pouzdanost poželjan su ali ne i dovoljan uslov. Veo-
ma je važno da se odrede (pokažu) kritični pravci pomeranja tačaka sa najvećom
tačnošću. Za ocenu geodetske mreže treba da se zna da je mreža manje upotrebljiva
za odredjivanje deformacija ako se slažu pravci bitnog sopstvenog vektora sa
kritičnim pravcima pomeranja tačaka ispitivanog objekta. Bitni sopstveni vektori
su vektori sa maksimalnom sopstvenom vrednošću. Može se posle odredjenih trans-
formacija (|59|), (2.10.6) napisati kao

$$\sigma_y^2 = \sigma_o^2 f^T f \lambda_k \quad (2.10.11)$$

Iz (2.10.11) sledi da je tačnost funkcije y mala, σ_y^2 je velika, ako je λ_k naj-
veća sopstvena vrednost. Znači, u pravcu bitnog sopstvenog vektora (maksimalna
sopstvena vrednost) mala je tačnost funkcije, pa treba izbegavati poklapanje
kritičnih pravaca deformacije sa pravcima bitnih sopstvenih vektora. Grafički
prikaz bitnih sopstvenih vektora od Q_{xx} veoma je važno sredstvo za vizuelnu
predstavu o slabim pravcima i slabim zonama mreže.

*Kod projektovanja mreža za odredjivanje deformacije objekta treba
nastojati da predvidive deformacije (pomeranje tačaka) i bitni sopstveni vektor-
ri budu medjusobno ortogonalni, ali nikako se nesme dopustiti da se ovi pravci
poklope jer je tada mala verovatnoća otkrivanja deformacija.*

Za ocenu tačnosti koriste se mere tačnosti.

Za tačku, kao mere tačnosti položaja tačke služe: apsolutna elipsa grešaka, relativna elipsa grešaka, elipsa poverenja, relativna elipsa poverenja i položajna greška.

Za mrežu, kao mere tačnosti koriste se: $\text{trag } Q_{xx} = \min$ (uslov 2.10.4), $\text{det } Q_{xx} = \min$ (uslov 2.10.3), $\lambda_{\max} \rightarrow \min$, pravci bitnih vektora, uslov (2.10.10) homogenosti i izotropije, σ_0 a priori m'_0 (ili $\hat{\sigma}_0$) unutrašnja tačnost, m_0 (ili $\hat{\sigma}_0$) spoljna tačnost. Spoljna tačnost m_0 dobija se posle izravnjanja iz popravaka v , a unutrašnja tačnost dobija se pre izravnjanja na pr. iz razlika između nivelnja napred nazad, iz izravnjanja pravaca na stanici (mreža od pravaca), iz razlika dvostruko ili višestruko merenih strana.

2.10.2. Pouzdanost mreža

Pouzdanost mreže - mogućnost otkrivanja grubih i sistematskih grešaka - otpornost na grube greške. Uprkos činjenici da su merenja izvršena sa velikom pažnjom pravimo neizbežne greške. Neotkrivene greške u opažanjima mogu dovesti do pogrešnih zaključaka u pogledu mogućih deformacija. Potrebno je, ako je moguće, otkriti sve grube greške u opažanjima i eliminisati ih ili pak uticaj neotkrivenih grubih grešaka u opažanjima smanjiti, t.j. učiniti da njihov uticaj na tačnost mreže bude što je moguće manji. *Mreža u kojoj postoji slaba kontrola grubih grešaka nije podesna za određivanje deformacija objekta jer je veliki rizik davanja pogrešnih zaključaka.* Za mrežu se kaže da je pouzdana ako i najmanje grube greške mogu biti otkrivene. U protivnom mreža je nepouzdana manje ili više. Nema apsolutno pouzdane mreže, već samo većeg ili manjeg stepena pouzdanosti. Postoje lokalni i globalni kriterijumi pouzdanosti. Za otkrivanje uticaja grubih grešaka na celu mrežu ili na veći deo mreže služe globalni kriterijumi a za otkrivanje grubih grešaka u pojedinim opažanjima služe lokalni kriterijumi. O ovim kriterijumima biće više govora u narednim izlaganjima.

2.10.2.1. Spoljna tačnost kao globalni kriterijum pouzdanosti

Spoljna tačnost m_0 (dobijeno iz popravaka v posle izravnjanja mreže), upoređena sa apriornom tačnošću σ_0 , ili sa unutrašnjom tačnošću m'_0 (dobijeno pre izravnjanja iz rezultata merenja) koristi se kao globalni kriterijum pouzdanosti [55]. Sve tri tačnosti, spoljna, a priori i unutrašnja odnose se na iste veličine (na opažanje koje ima težinu jedinica).

Ako vektor opažanja l ne sadrži grube greške tada su m_0^2 i m'_0^2 nezavi-

sne i važi (|55|)

$$M(m_o^2) = M(m_o'^2) = \sigma_o^2 \quad (2.10.12)$$

$$\frac{m_o^2}{m_o'^2} \sim F_{f, f'} \quad (2.10.13)$$

$$\frac{m_o^2}{\sigma_o^2} \sim \frac{\chi_f^2}{f} \quad (2.10.14)$$

gde su f odn f' broj stepeni slobode kod računanja m_o odnosno m_o' .

U slučaju kada vektor opažanja ($\bar{l} = \bar{l} + \Delta$) sadrži grube greške (|55|)

$$M(m_o^2) = \sigma_o^2 + \lambda \quad (2.10.15)$$

$$\lambda = \frac{1}{f} \Delta^T Q_{ll}^{-1} Q_{lv} Q_{vv}^{-1} \Delta \geq 0 \quad (2.10.16)$$

gde su λ - parametar necentralnosti F odn. χ^2 raspodele,

Δ - vektor grubih(ili sistematskih)grešaka.

Znači greška Δ uvećava m_o^2 t.j. pogoršava se spoljna prema unutrašnjoj ili a'priornoj, tačnosti i iz (2.10.13) i (2.10.14) sledi test pravilo (|55|)

$$\frac{m_o^2}{m_o'^2} \geq F_{f, f', 1-\alpha} \quad (2.10.17)$$

$$\frac{m_o^2}{\sigma_o^2} \geq \frac{\chi_{f, 1-\alpha}^2}{f} \quad (2.10.18)$$

u kom slučaju prihvatamo hipotezu o postojanju grubih grešaka u rezultatima merenja, pri čemu $F_{f, f', 1-\alpha}$ i $\chi_{f, 1-\alpha}^2$ predstavljaju odgovarajuće kvantile F i χ^2 rasporeda respektivno. Verovatnoća otkrivanja grešaka Δ , ili moć testa, direktno zavisi od pouzdanosti mreže, i raste sa veličinom parametra λ .

2.10.2.2. Otkrivanje grubih grešaka

Polazi se od pretpostavke da je od n opažanja jedno jedino opažanje opterećeno grubom greškom Δ_i , na pr. greška kod čitanja, loše viziranje i dr., (do u detalje je razradjena ova materija u [6], [56], [57], [59]).

$$z = \bar{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \Delta_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{z} + e_i \Delta_i \quad (2.10.19)$$

gde je $e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & & i & & n \end{bmatrix}$

U ovom slučaju je ([57])

$$v = \bar{v} - Q_{vv} Q_{zz}^{-1} z_i \Delta_i, \quad (2.10.20)$$

što znači da su sve popravke u vektoru v pod uticajem grube greške Δ_i , jednog jedinog opažanja, gruba greška kviri sve popravke. Ocena veličine $\hat{\Delta}_i$ pomoću vektora popravki v pod uslovom $\bar{v}^T P \bar{v} \rightarrow \min$ je ([57])

$$\hat{\Delta}_i = \frac{e_i^T P v}{e_i^T P Q_{vv} P e_i} \quad (2.10.21)$$

i

$$\sigma_{\Delta i} = \sigma_0 (e_i^T P Q_{vv} P e_i)^{1/2}.$$

Mogu da se postave hipoteze

$$H_0 : M(\hat{\Delta}_i) = 0$$

i

$$i=1, 2, \dots, n$$

$$(2.10.22)$$

$$H_{A_i} : M(\hat{\Delta}_i) = \Delta_i \neq 0$$

Kao test veličina koristi se ([55])

$$\omega_i = \frac{\hat{\Delta}_i}{\sigma_{\Delta i}} = \frac{e_i^T P v}{\sigma_0 \sqrt{e_i^T P Q_{vv} P e_i}} \quad (2.10.23)$$

ω_i ima $N(0,1)$ ako važi H_0 .

ω_i ima $N(\delta_i, 1)$ ako važi H_{A_i} sa parametrom necentralnosti

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{\sigma_{\Delta_i}} = \frac{\Delta_i}{\sigma_0} \sqrt{e_i^T P Q_{vv} P e_i} = \quad (2.10.24)$$

Verovatnoća otkrivanja neke grube greške zavisi od parametra necentralnosti δ_i , i ona može da posluži kao mera za pouzdanost mreže. Ako se za grubu grešku opažanja z_i uzme da je proporcionalna standardnom odstupanju opažanja z_i , tada je prema ([57])

$$\delta_i = k \sqrt{z_i} \quad (2.10.25)$$

Parametar z_i je lokalna mera pouzdanosti. Za izvesno opažanje z_i , ova mera je

$$z_i = e_i^T Q_{ll} e_i e_i^T Q_{ll}^{-1} Q_{vv} Q_{ll}^{-1} e_i, \quad 0 \leq z_i \leq 1 \quad (2.10.26)$$

Verovatnoća otkrivanja grubih grešaka $\Delta_i = K \sigma_i$ može se uzeti sa nomograma ([57]) kao funkcija od z . Mreža je najpouzdanija ako su svi brojevi pouzdanosti z_i što je više moguće bliži jedinici, t.j. ako je $z_i \rightarrow 1$ za svako $j=1,2,\dots,n$.

2.10.2.3. Uticaj grubih grešaka na ocene koordinata tačaka

Testom opisanim u (2.10.2.2) gruba greška Δ_i opažanja z_i biće otkrivena i eliminisana. Verovatnoća otkrivanja grube greške može biti uzeta sa nomograma ([59]). Međutim, grube greške sa manjom apsolutnom vrednošću mogu biti otkrivene samo sa malom verovatnoćom zbog toga postoji mogućnost da ostanu neotkrivene. Zato, da bi se ispitao uticaj takvih grešaka na koordinate tačaka mreže treba naći minimalnu moć i pronaći grubu grešku Δ_i koja se može otkriti sa verovatnoćom γ

$$\gamma < \bar{\gamma} \quad (2.10.27)$$

Minimalna moć γ , (verovatnoća otkrivanja grube greške) odgovara vrednosti δ necentralnog parametra δ , uzima se iz tabele normalne raspodele. Iz (2.10.25) sledi ([59])

$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{\sigma_0} \sqrt{e_i^T Q_{ll}^{-1} Q_{vv} Q_{ll}^{-1} e_i} < \bar{\delta} \quad (2.10.28)$$

$$\Delta_j < \sigma_0 \bar{\delta} \frac{1}{\sqrt{e_i^T Q_{ll}^{-1} Q_{vv} Q_{ll}^{-1} e_j}} \quad (2.10.29)$$

Od Δ_j rezultira greška koordinata

$$\Delta x_i = Q_{xx} A^T Q_{ll}^{-1} e_i \Delta_j \quad (2.10.30)$$

Koordinate tačaka \bar{X} su pogrešne za iznos Δx_i . Iz (2.10.29) sledi parametar necentralnosti ($|59|$)

$$\omega_j < \bar{\delta}^2 \frac{e_i^T Q_{ll}^{-1} e_i e_i^T Q_{ll}^{-1} e_i}{z_i} \quad (2.10.31)$$

Preostala gruba greška u opažanjima, neće biti otkrivena sa verovatnoćom $\bar{\gamma}$ (minimalna moć), i dovodi do grešaka koordinata. Ove greške, mere se sa parametrom necentralnosti ω_i , minimalne su ako broj pouzdanosti $z_j \rightarrow 1$. Naprotiv ako je broj z_i vrlo mali moguće su grube greške i u koordinatama.

2.11. IZRAVNANJE SLOBODNIH MREŽA I S-TRANSFORMACIJA

Geodetske mreže za deformaciona merenja uvek su slobodne mreže. Ove mreže su slobodne jer ne raspolažemo sa DATUM-om (neophodnim parametrima za definisanje koordinatnog sistema). U tom slučaju normalne jednačine su singularne sa defektom (ranga) 4 ili 3 ili 2 za mreže u ravni xOy . Kako se koordinatni sistem može definisati na proizvoljne načine, to je vrlo važno ustanoviti da li ima i koje veličine su invarijante u odnosu na izabrani koordinatni sistem. Dalje je bitno pronaći koje su veličine ocenljive (2.11.3). Kao što je poznato, uvidom u literaturu, postoje razne metode rešavanja normalnih jednačina (klasična inverzija, uopštena inverzija, pseudoinverzija. Nas interesuju često nepomerena jedinstvena rešenja i mogućnost transformisanja pomeirenih nejedinstvenih rešenja u nepomerena jedinstvena rešenja (S-transformacija (2.11.7).

2.11.1. Datum

Kada se slobodna mreža izravnavaju po metodi posrednih merenja neki koordinatni sistem mora biti definisan. Za mreže u ravni DATUM parametri su: dva parametra za definisanje koordinatnog početka, jedan parametar za definisanje orijentacije i jedan parametar za definisanje razmere - dve translacije duž x i y ose, rotacija i razmera koordinatnog sistema. Neki od ovih parametara

moгу biti opažani a neki ne. Ako su u mreži opažane dužine i azimuti definisani su orijentacija i razmera. Koordinatni početak (koordinate x i y jedne tačke) za sada ne može biti definisan opažanjem sa dovoljnom tačnošću.

Ako se definiše koordinatni sistem dobijaju se regularne normalne jednačine, a ako se ne definiše dobijaju se singularne normalne jednačine. Singularne normalne jednačine mogu biti izbegnute definisanjem DATUMA. Postoji veliki broj načina na koji se može definisati datum. Ako su u mreži mereni samo pravci, uzimanjem da su date bilo koje dve tačke (izravunate koordinate jednake su privremenim koordinatama) definiše se koordinatni sistem "klasično izravnanje". Usvajanjem neke druge dve tačke kao date dobija se novi koordinatni sistem. Znači moguće je definisati onoliko koordinatnih sistema koliko ima kombinacija po dve tačke u mreži. U svakom od ovih koordinatnih sistema dobićemo posle izravnjanja različite vrednosti za koordinate tačaka. Moguće je osim gore pomenutih kombinacija, definisati datum tako da bude $x^T x = \min$ t.j. $\text{trag } Q_{xx} = \min$. Ovo se postiže tako što u ovom slučaju sve tačke definišu datum. U (2.11.7) je pokazano kako je moguće transformisati bilo koje klasično rešenje sa minimalnom normom ($x^T x = \min$) i, takodje, kako je moguće transformisati neko klasično rešenje u bilo koje drugo klasično rešenje.

Rešenje uz uslov $x^T x = \min$ je ustvari takvo da sve tačke mreže definišu DATUM. Ovo rešenje je potrebno onda kada postoji interes za matricu Q_{xx} čiji je trag minimalan ($\text{trag } Q_{xx} = \min$).

2.11.2. Defekt ranga

Kada matrica A jednačina popravaka nema potpun rang kolona tada kažemo da je A nepotpunog ranga kolona. U tom slučaju je i matrica normalnih jednačina nepotpunog ranga. Defekt ranga je $d = u - r \neq 0$, d je defekt ranga, u - broj nepoznatih ili dimenzije matrice $A^T P A$, r je rang matrice A . Razlikujemo spoljnji i unutrašnji defekt. Spoljnji defekt je defekt DATUM-a (početnih podataka), a unutrašnji je defekt konfiguracije (što se ne sme dozvoliti za kontrolne mreže). Ukupni defekt mreže d jednak je zbiru unutrašnjeg i spoljašnjeg defekta ($d = d_k + d_o$).

2.11.2.1. Defekt datuma

Kod klasičnog izravnjanja slobodnih mreža, nehotično se definiše koordinatni sistem, kod mreža sa pravcima (uglovima) fiksiraju se dve tačke, a kod mreže sa pravcima (uglovima) i dužinama fiksira se jedna tačka i pravac prema nekoj drugoj tački. Na ovaj način se u matrici A četiri, odnosno tri kolone brišu. Znači, za četiri odnosno za tri nepoznate, se uzimaju a priori poznate vrednosti. Defekt DATUMA se pokazuje u defektu ranga kolona $d_D = u - r_D$ matrice A . Defekt DATUMA je jednak broju nepoznatih parametara DATUMA za učvršćivanje konfiguracije mreže u koordinatnom sistemu. Ovde treba konstatovati da je merenim elementima medjusobni položaj tačaka mreže odredjen, odnosno preodredjen ali ostaje neodredjen položaj mreže u nekom koordinatnom sistemu.

U geodetskim mrežama postoje tri vrste DATUM parametara: translacije, rotacija i promena razmere.

2.11.2.2. Defekt konfiguracije

Ukoliko merene veličine ne utvrđuju jednoznačno položaje pojedinih tačaka ili delova mreže javlja se defekt konfiguracije. Drugim rečima vektor opažanja l nije dovoljan za odredjivanje nepoznatih \hat{x} . Ovaj defekt moguće je ukloniti ako se uvedu dodatna podesna opažanja tzv. pseudomerenja u vektoru b . Da bi se uklonio smanjeni rang normalnih jednačina N potrebno je tačno d takvih pseudomerenja. Ova opažanja treba da sadrže samo informaciju koja je potrebna da se ukloni singularitet i nije bitno što ona faktički ne postoje. Broj linearno nezavisnih vektora redova matrice A pri potpunom rangu redova je $n_k = u - d_D$, a to znači da je n_k medjusobno nezavisnih opažanja dovoljno i neophodno da se mreža jednoznačno odredi. Ako je n_D broj nezavisnih opažanja t.j. $n_D \leq n_k$ tada postaje defekt konfiguracije $d_k = n_k - n_D$.

Kod izrade mreže za ispitivanje pomeranja i deformacija uvek će se izbeći defekt konfiguracije. Ali kasnije može, zbog nedostataka nekog merenja ili zbog grubih grešaka, da nastupi defekt konfiguracije.

Kruger je 1979 [35] pokazao da je konfiguracijski defekt (ukoliko u toku eksploatacije mreže nastane) moguće izbeći, a Hepke je 1978 [28] dokazao da je rešenje sa pseudoopažanjima identično sa rešenjem koje se dobija transformacijama sličnosti, a oba su identična rešenju normalnih jednačina sa pseudo-inverzijom N^+ .

2.11.3. Invarijante i ocenljive veličine

Jedno od veoma važnih pitanja je pitanje invarijantnih veličina (od izbora datuma), jer jedino invarijantne veličine spadaju u ocenljive veličine.

U [1] i [28] ukazuje se da su merene dužine invarijantne prema kretanju - translaciji i rotaciji. Uglovi i odnosi dužina invarijante su prema transformaciji sličnosti. Mereni orijentisani pravci su invarijante prema translaciji i promeni razmere. U kontrolnoj mreži u kojoj su mereni uglovi (pravci), dužine i orijentisani pravci, samo je translacija defekt, osim izravnatih merenih veličina (uglovi, dužine i orijentisani pravci) i koordinatne razlike su invarijante.

Sve opažane veličine su ocenljive, imaju nepomerenu ocenu, ali istovremeno su i invarijante. Znači sve invarijantne veličine su ocenljive veličine. Ne samo opažane veličine nego i njihove linearne kombinacije, koje su sa opažanim veličinama povezane sa matricom potpunog ranga, imaju nepomerene ocene - ocenljive su.

Ako to nije slučaj (matrica nema puni rang) faktorizacijom ranga ($|1|$) mogu se naći neke ocenljive veličine na pr. $y = Ax$, ako matrica A nema potpun rang tada veličine x imaju pomerenu ocenu. Zato je potrebno uzeti nove dve matrice B i C , gde B ima potpun rang kolona a C potpun rang vrsta, tako da je $A = B C$ pa sledi $y = Ax = B Cx$. *Nepoznate Cx imaju nepomerenu ocenu (ocenljive su)*, jer matrica B ima potpun rang. Postoji više mogućnosti faktorizacije ranga kroz slobodni izbor matrice B . U jednoj mreži ima beskonačno mnogo ocenljivih veličina ali samo r , rang od A , linearно nezavisnih ocenljivih veličina.

2.11.4. Klasično izravnanje

Dugo vremena inverzija singularnih normalnih jednačina predstavljala je problem, dok danas to nije slučaj. Singularitet normalnih jednačina, dugo vremena, izbegavan je tako što su proizvoljno birani datum parametri. Broj izabranih parametara zavisi od vrste opažanih veličina. Usvajanjem datum parametara nastaje tzv. klasično izravnanje, normalne jednačine regularne su. Matrica A redukovana je tako što se izbriše d kolona (d je defekt ranga) i novodobijena matrica normalnih jednačina ima inverziju N^{-1} .

Zašto se ovde tretira klasično izravnanje kada se u svetu uveliko prešlo na izravnanje pod uslovom $x^T x = \min$ (pseudoinverzija, uopštena inverzija). Izmedju ostalog zato što je u praksi dugo vremena primenjivano samo kla-

sično izravnanje pa bi sada trebalo odbaciti sva dosadašnja izravnanja jer nisu "moderna" a važniji razlog je što su pomeranja tačaka dobijena iz klasičnog izravnanja (razlika koordinata nulte serije i transformisanih koordinata tekuće serije dobijenih transformacijom na nultu seriju) istovetna sa pomeranjima dobijenim iz razlike koordinata tačaka nulte i tekuće serije dobijenih pod uslovom $x^T x = \min$. Znači kod analize deformacija moguće je i dalje sprovoditi klasično izravnanje, što se tiče dobijanja pomeranja tačaka.

Problemi nastaju kada se radi o oceni tačnosti jer samo invarijantne veličine imaju linearnu nepomerenu ocenu sa najmanjom disperzijom, t.j. ocenljive su. Koordinate tačaka, kod klasičnog izravnanja, nisu ocenljive veličine osim u slučaju kada u mreži ima Laplasovih tačaka, dok pri izravnanju sa $x^T x = \text{minimum}$ i koordinate tačaka spadaju u ocenljive veličine; što znači još i to da ih možemo direktno uporedjivati (misli se na uporedjenje koordinata iste tačke u dve merne epohe). Medjutim S transformacije omogućuju prelaz sa klasičnog rešenja na rešenje sa $x^T x = \text{minimum}$ i obratno, pa s tog razloga se može koristiti i klasično izravnanje.

2.11.5. Uopštena inverzija

Ako postoji matrica G takva da je ($[66]$)

$$AGA = A \quad (2.11.1)$$

tada se G naziva *uopštena inverzija* ili g -inverzija matrice A . Uobičajeno je da se matrica G obeleži kao A^- . Postoji beskonačno mnogo matrica G koje zadovoljavaju (2.11.1), sve te matrice G su uopštene inverzije od A što znači da g -inverzija nije jedinstvena. Ima mnogo načina dobijanja uopštene inverzije $[66]$, $[68]$. Postoje tri osnovna tipa uopštene inverzije.

- 1) *Uopštena inverzija za rešenje saglasnog sistema $Ax = y$ sa minimalnom normom rešenja (MN)*. Rešenje saglasnog sistema $Ax = y$ ima minimalnu normu za svako y , ako uopštena inverzija G zadovoljava uslove $[66]$

$$AGA = A, \quad (GA)^T = GA \quad (2.11.2)$$

- 2) *Uopštena inverzija za rešenje nesaglasnog sistema $Ax = y$ sa minimumom sume kvadrata popravaka (MNK)*. Rešenje \tilde{x} sa MNK mora da zadovolji uslov $[66]$

$$|v| = |A\tilde{x} - y| = \inf_x |Ax - y| \quad (2.11.3)$$

Ovo rešenje MNK je vrlo važno u teoriji linearnog ocenjivanja. Neka je uopštena inverzija G takva da je $\tilde{x} = Gy$, tada je \tilde{x} MNK - rešenje sistema $Ax = y$ pri čemu G mora zadovoljiti uslove [66]

$$AGA = A, \quad (AG)^T = AG \quad (2.11.4)$$

MNK rešenje \tilde{x} može biti nejedinstveno, ali je $\min |Ax - y|$ jedinstveno [60].

- 3) Uopštena inverzija za rešenje nesaglasnog sistema $Ax = y$ sa minimalnom normom i minimalnom sumom kvadrata popravaka. Ovo rešenje, u oznaci \hat{x} , dobija se pomoću poznate pseudoinverzije A^+ koja je opisana u poglavlju (2.11.6).

2.11.6. Pseudoinverzija

Rao i Mitra (1971) uopštenu inverziju G koja zadovoljava uslove [66],

$$\begin{aligned} AGA &= A \\ (AG)^T &= AG \\ GAG &= G \\ (GA)^T &= GA \end{aligned} \quad (2.11.5)$$

nazivaju inverzijom Mura-Penrouza (Moore-Penrose), ili pseudoinverzijom. Označava se i sa A^+ . Ova inverzija je refleksivna t.j. inverzija inverzije jednaka je prvobitnoj matrici i ima $R(A) = R(A^+)$. Dalje pseudoinverzija normalnih jednačina N^+ daje rešenje sa $V^T V = \min$ i $X^T X = \min$ (optimalno rešenje). Jednoznačna je i ima $\text{trag } N^+ = \min$. Ovo rešenje se naziva najbolja linearna nepomerena ocena.

Rešenje sa N^+ može se dobiti S -transformacijom iz proizvoljnog rešenja t.j. iz bilo kojeg klasičnog rešenja.

N^+ se može dobiti na više načina, na primer spektralnim razlaganjem

$$N = \begin{bmatrix} H & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^T \\ G^T \end{bmatrix} = H \lambda_H H^T \quad (2.11.6)$$

gde su

λ_H - spektralna matrica sa sopstvenim vrednostima (većim od nule),

H - modalna matrica sa sopstvenim vrednostima većim od nule,

G - modalna matrica sa isčezavajućim sopstvenim vrednostima pri

čemu važi

$$H^T H = I ; \quad G^T G = I ; \quad I - \text{jedinična matrica} \quad (2.11.7)$$

$$H^T G = 0 \quad (2.11.8)$$

$$HG = 0 \quad (2.11.9)$$

Sada je inverzija Mura-Pemrouza

$$N^+ = Q_{xx} = (A + GG^T)^{-1} - GG^T \quad (2.11.10)$$

i ima svojstva

$$\begin{aligned} N Q_{xx} N &= N \\ Q_{xx} N Q_{xx} &= Q_{xx} \\ (A Q_{xx})^T &= N Q_{xx} \\ (Q_{xx} N)^T &= Q_{xx} N \end{aligned} \quad (2.11.11)$$

2.11.7. S - transformacija

S - transformacija ([6], [70], [72]) igra važnu ulogu u analizi geodetskih deformacionih merenja. Ona se koristi za:

$\hat{x}_m = S_m \hat{x}$ - transformisanje proizvoljnog rešenja u rešenje sa minimalnom normom

$\hat{x}_m = S_m \hat{x}_{rs}$ - transformisanje bilo kojeg klasičnog u rešenje sa minimalnom normom

$\hat{x}_{12} = S_{12} \hat{x}$ - transformiranje proizvoljnog rešenja u klasično (pri čemu je DATUM definisan sa tačkama 1 i 2)

$\hat{x}_{rs} = S_{rs} \hat{x}$ - transformisanje proizvoljnog rešenja u klasično (pri čemu je DATUM definisan sa tačkama r i s)

- $\hat{x}_{12} = S_{12} \hat{x}_{rs}$ - transformisanje bilo kojeg klasičnog (DATUM definisan sa tačkama r i s) klasično (DATUM definisan sa tačkama 1 i 2).
- $\hat{x}_p = S_p \hat{x}$ - transformisanje proizvoljnog rešenja u rešenje gde važi samo za p tačaka $x_p^T x_p = \min$.
- $Q_{\hat{x}_m} = S_m^T Q_{x_{rs}} S_m$ - transformisanje regularne matrice $Q_{x_{rs}}$ dobijene klasičnim izravnanjem) u singularnu matricu Q_{x_m} ($\text{trag } Q_{x_m} = \min$).

Rešenje normalnih jednačina $N_x = n$ sa uopštenom inverzijom N^- i pseudo inverzijom N^+ glase respektivno

$$\hat{x} = N^- n \quad \text{i} \quad \hat{x}_m = N^+ n \quad (2.11.12)$$

Sve matrice S (S_m, S_{12}, S_{rs}, S_p i dr.) su idempotentne $S = S \cdot S$ i moraju još da zadovolje uslove $S = SN^-N$, $NS = N$ ili $S^T NS = N$ (Van Mierlo [70]).

Načini dobijanja matrica S -transformacija za XOY mreže su:

$$S_m = I - L(L^T L)^{-1} L^T \quad (2.11.12)$$

$$S_{12} = I - L(L^T E_{12} L)^{-1} L^T E_{12} \quad (2.11.13)$$

$$S_{rs} = I - L(L^T E_{rs} L)^{-1} L^T E_{rs} \quad (2.11.14)$$

$$S_p = I - L(L^T E_p L)^{-1} L^T E_p \quad (2.11.15)$$

gde su I -jedinična matrica

E_{12}, E_{rs}, E_p - dijagonalne matrice

$$E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2m \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ 2m \end{matrix}$$

1 2 3 4 . . . 2m

$$E_{rs} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & \\ 0 & & 0 & & 0 & \end{bmatrix} \begin{matrix} 2r-1 \\ 2r \\ 2s-1 \\ 2s \\ \vdots \\ 2m \end{matrix}$$

1 2 ... $2p-1$ $2p$ $2s-1$ $2s$... $2m$

$$E_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & & 1 & \\ & & & & & \\ & & 0 & & & 0 \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 2p \\ \vdots \\ 2m \end{matrix}$$

1 2 $2p$. . . $2m$

(2.11.16)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \bar{y}_1 & \bar{x}_1 & 1 \\ 0 & 1 & -\bar{x}_1 & \bar{y}_1 & 2 \\ 1 & 0 & \bar{y}_2 & \bar{x}_2 & 3 \\ 0 & 1 & -\bar{x}_2 & \bar{y}_2 & 4 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \bar{y}_m & \bar{x}_m & 2m-1 \\ 0 & 1 & -\bar{x}_m & \bar{y}_m & 2m \end{bmatrix} \quad (2.11.17)$$

\bar{x}_i, \bar{y}_i su koordinate tačaka u odnosu na težište dela mreže (tačke M_1 i M_2 za matricu S_{12} ili tačke M_r i M_s za matricu S_{rs} ili prvih p tačaka parcijalne mreže za matricu S_p ili svih tačaka za matricu S_m). Kada se koriste ove koordinate \bar{x}_i, \bar{y}_i , računanje elemenata matrica S_m, S_{12}, S_{rs}, S_p postoje vrlo lako. Ako je

$$\bar{x}_i = x_i^0 - \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m x_r^0 \quad (2.11.18)$$

$$\bar{y}_i = y_i^0 - \frac{1}{m} \sum_{r=1}^m y_r^0$$

gde su x_i^0, y_i^0 približne koordinate tačaka mreže. Odstojanje tačke od težišta je $l_i \cdot l_i = \bar{x}_i \cdot \bar{x}_i + \bar{y}_i \cdot \bar{y}_i$ i neka je

$$p_{i,r} = \frac{1}{m} + \frac{\bar{y}_i \bar{y}_r + \bar{x}_i \bar{x}_r}{\sum_r l_r l_r} ; \quad r = 1, 2, \dots, m$$

$$q_{i,r} = \frac{\bar{y}_i \bar{y}_r - \bar{x}_i \bar{x}_r}{\sum_r l_r l_r} ; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.11.19)$$

Tada je

$$S_m = \begin{bmatrix} 1-p_{1,1} & q_{1,1} & -p_{1,2} & q_{1,2} & \dots & -p_{1,m} & q_{1,m} \\ -q_{1,1} & 1-p_{1,1} & -q_{1,2} & -p_{1,2} & \dots & -q_{1,m} & -p_{1,m} \\ -p_{2,1} & q_{2,1} & 1-p_{2,2} & q_{2,2} & \dots & -p_{2,m} & q_{2,m} \\ -q_{2,1} & -p_{2,1} & -q_{2,2} & 1-p_{2,2} & \dots & -q_{2,m} & -p_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -p_{m,1} & q_{m,1} & -p_{m,2} & q_{m,2} & \dots & 1-p_{m,m} & q_{m,m} \\ -q_{m,1} & -p_{m,1} & -q_{m,2} & -p_{m,2} & \dots & -q_{m,m} & 1-p_{m,m} \end{bmatrix} \quad (2.11.20)$$

Matrica S_m singularna je i ima defekt ranga 4 i pomoću nje transformiše se: bilo koja regularna kovarijaciona matrica koordinata u singularnu sa zahtevanim defektom ranga; proizvoljno rešenje u rešenju sa minimalnom normom; bilo koje klasično u rešenje sa minimalnom normom.

Matrica S_{12} glasi

$$S_{12} = \left[\begin{array}{cccc|cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -p_{3,1} & q_{3,1} & -p_{3,2} & q_{3,2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -q_{3,1} & -p_{3,1} & -q_{3,2} & -p_{3,2} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p_{4,1} & q_{4,1} & -p_{4,2} & q_{4,2} & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -q_{4,1} & -p_{4,1} & -q_{4,2} & -p_{4,2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ -p_{m,1} & q_{m,1} & -p_{m,2} & q_{m,2} & & & & & & 0 \\ -q_{m,1} & -p_{m,1} & -q_{m,2} & -p_{m,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{array} \right] \quad (2.11.21)$$

gde su

$$\bar{x}_i = x_i^0 - \frac{1}{2} (x_1^0 + x_2^0)$$

$$i=3, 4, \dots, m$$

$$\bar{y}_i = y_i^0 - \frac{1}{2} (y_1^0 + y_2^0)$$

$$l_{rr} = \bar{x}_r \bar{x}_r + \bar{y}_r \bar{y}_r$$

$$(2.11.22)$$

$$p_{i,r} = \frac{1}{2} + \frac{\bar{y}_i \bar{y}_r + \bar{x}_i \bar{x}_r}{l_1 l_1 + l_2 l_2} \quad r=1, 2$$

$$q_{i,r} = \frac{\bar{y}_i \bar{x}_r - \bar{x}_i \bar{y}_r}{l_1 l_1 + l_2 l_2}$$

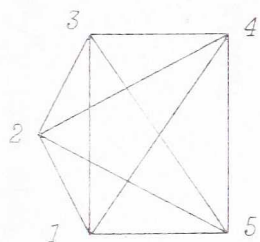
Dalje neka je $r=3$, $s=4$ tada je

$$S_{3,4} = \left[\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & 0 & & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & & & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & 0 & & & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & 8 \\ \hline & & & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \vdots \\ & & & & & & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & & & & & & & 1 \end{array} \right] \quad (2.11.23)$$

1 2 3 4 2m

$$q_{i,r} = \frac{\bar{y}_i \bar{x}_r - \bar{x}_i \bar{y}_r}{\Sigma (\bar{x}_k \bar{x}_k + \bar{y}_k \bar{y}_k)} \quad (2.11.26)$$

PRIMER. Mreža od 5 tačaka u kojoj su mereni samo pravci izravната je klasično,



Sl. 2.11.1

tako što je DATUM definisan uzimanjem dve po dve tačke kao date u svim kombinacijama (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (2,3); (2,4); (2,5); (3,4); (4,5). Korišćenjem S -transformacije prikazane u ovom poglavlju (2.11.7) transformisano je svih deset klasičnih rešenja u rešenje sa minimalnom normom $X^T X = \min$ i rezultati su prikazani u tabeli (2.11.1). Dobijeni rezultati pokazuju da se transformisanjem bilo kojeg klasičnog rešenja odgovarajućom S -

transformacijom dobija rešenje sa $X^T X = \text{minimum}$ koje je jedinstveno.

U tabeli (2.11.2) prikazani su rezultati transformacije svih klasičnih rešenja u klasično rešenje x_{12} (date tačke su 1 i 2). Rezultati pokazuju da se S transformacijom može bilo koje klasično rešenje transformisati u bilo koje drugo klasično rešenje. Ovo je važno onda kada se iz bilo kojih razloga ne mogu koristiti date tačke iz prethodnih izravnjanja u novom izravnjanju, ili je potrebno iz nekih razloga sračunati koordinate kada te tačke definišu datum.

Ovde treba naglasiti da rezultati iz tabele (2.11.1) pokazuju da je moguće vrlo lako transformisati bilo koje klasično rešenje u rešenje sa minimalnom normom, što znači da sva stara klasična rešenja (naravno i sva buduća klasična rešenja) mogu se lako transformisati bez ponovnog izravnjanja.

Transformisanje bilo kojeg klasičnog rešenja u rešenje X_M za koje važi $X_M^T X_M = \min$

$$X_M = S_M X_{ij}$$

Tabela 2.11.1

	X_{12} cm	$X_M^{X_{12}}$ cm	X_M cm	X_{13} cm	$H_M X_{13}$ cm	$X_M^{X_{13}}$ cm	X_{14} cm	$H_M X_{14}$ cm	$X_M^{X_{14}}$ cm	X_M cm	X_{15} cm	$H_M X_{15}$ cm	$X_M^{X_{15}}$ cm	X_M cm	X_{23} cm	$H_M X_{23}$ cm	$X_M^{X_{23}}$ cm	X_M cm
y_1	0,00	-0,093	-0,07	0,00	-0,072	-0,07	0,00	-0,073	-0,07	-0,07	0,00	-0,072	-0,07	-0,07	-0,11	-0,070	-0,07	-0,07
x_1	0,00	+0,033	+0,03	0,00	+0,031	+0,03	0,00	+0,032	+0,03	+0,03	0,00	+0,031	+0,03	+0,03	+0,08	+0,032	+0,03	+0,03
y_2	0,00	+0,022	+0,02	+0,03	+0,018	+0,02	+0,07	+0,020	+0,02	+0,02	+0,12	+0,020	+0,02	+0,02	0,00	+0,020	+0,02	+0,02
x_2	0,00	-0,049	-0,05	-0,07	-0,048	-0,05	-0,12	-0,046	-0,05	-0,05	-0,17	-0,049	-0,05	-0,05	0,00	-0,048	-0,05	-0,05
y_3	+0,01	+0,009	+0,01	0,00	+0,011	+0,01	+0,01	+0,008	+0,01	+0,01	+0,05	+0,0148	+0,01	+0,01	0,00	+0,010	+0,01	+0,01
x_3	+0,14	-0,031	-0,03	0,00	-0,034	-0,03	-0,11	-0,034	-0,03	-0,03	-0,22	-0,030	-0,03	-0,03	0,00	-0,030	-0,03	-0,03
y_4	+0,14	+0,022	+0,02	+0,05	+0,023	+0,02	0,00	+0,023	+0,02	+0,02	-0,04	+0,17	+0,02	+0,02	0,00	+0,020	+0,02	+0,02
x_4	+0,25	+0,038	+0,04	+0,12	+0,038	+0,04	0,00	+0,036	+0,04	+0,04	-0,13	+0,039	+0,04	+0,04	+0,05	+0,037	+0,04	+0,04
y_5	+0,21	+0,020	+0,02	+0,13	+0,020	+0,02	+0,07	+0,023	+0,02	+0,02	0,00	+0,020	+0,02	+0,02	-0,03	+0,020	+0,02	+0,02
x_5	+0,02	+0,011	+0,01	+0,03	+0,013	+0,01	+0,02	+0,011	+0,01	+0,01	0,00	+0,009	+0,01	+0,01	+0,04	+0,009	+0,01	+0,01

TABELA 2.11.2 (nastavak)

	X_{24} cm	$H_M X_{24}$ cm	X_M cm	X_{25} cm	$H_M X_{25}$ cm	X_M cm	X_{34} cm	$H_M X_{34}$ cm	X_M cm	X_{35} cm	$H_M X_{35}$ cm	X_M cm	X_{45} cm	$H_M X_{45}$ cm	X_M cm
y_1	-0,14	-0,070	-0,07	-0,11	-0,072	-0,07	-0,20	-0,071	-0,07	-0,11	-0,073	-0,07	-0,08	-0,073	-0,07
x_1	+0,08	+0,030	+0,03	+0,05	+0,031	+0,03	+0,08	+0,030	+0,03	+0,04	+0,034	+0,03	+0,02	+0,031	+0,03
y_2	0,00	+0,020	+0,02	0,00	+0,023	+0,02	-0,04	+0,023	+0,02	-0,01	+0,020	+0,02	+0,02	+0,020	+0,02
x_2	0,00	-0,047	-0,05	0,00	-0,048	-0,05	+0,03	-0,045	-0,05	-0,02	-0,048	-0,05	-0,07	-0,046	-0,05
y_3	+0,01	+0,008	+0,01	+0,02	+0,009	+0,01	0,00	+0,009	+0,01	0,00	+0,008	+0,01	0,00	+0,008	+0,01
x_3	-0,03	-0,033	-0,03	+0,02	-0,030	-0,03	0,00	-0,031	-0,03	0,00	-0,037	-0,03	-0,07	-0,033	-0,03
y_4	0,00	+0,0248	+0,02	+0,05	+0,021	+0,02	0,00	+0,020	+0,02	+0,03	+0,023	+0,02	0,00	+0,0225	+0,02
x_4	0,00	+0,039	+0,04	+0,06	+0,038	+0,04	0,00	+0,038	+0,04	+0,05	+0,0352	+0,04	0,00	+0,036	+0,04
y_5	-0,08	+0,017	+0,02	0,00	+0,020	+0,02	-0,12	+0,020	+0,02	0,00	+0,023	+0,02	0,00	+0,022	+0,02
x_5	+0,02	+0,012	+0,01	0,00	+0,010	+0,01	-0,01	+0,009	+0,01	0,00	+0,011	+0,01	0,00	+0,011	+0,01

TABELA 2.11.2

$X_{12} = S_{12} X_{ij}$ Transformacija bilo kojeg klasičnog X_{ij} u klasično X_{12}

	$X_{12} = S_{12} X_{13}$	$X_{12} = S_{12} X_{14}$	$X_{12} = S_{12} X_{15}$	$X_{12} = S_{12} X_{23}$	$X_{12} = S_{12} X_{24}$	$X_{12} = S_{12} X_{25}$	$X_{12} = S_{12} X_{34}$	$X_{12} = S_{12} X_{35}$	$X_{12} = S_{12} X_{45}$	\bar{X}_{12}	$\bar{\bar{X}}_{12}$
y_1	0.00									0.00	0
x_1	0.00									0.00	0
y_2	0.00									0.00	0
x_2	0.00									0.00	0
y_3	0.016	0.009	0.017	0.014	0.009	0.008	0.003	0.012	0.008	0.010	0.01
x_3	0.131	0.131	0.139	0.135	0.131	0.140	0.134	0.137	0.132	0.134	0.14
y_4	0.141	0.138	0.134	0.139	0.139	0.137	0.127	0.144	0.136	0.136	0.14
x_4	0.242	0.241	0.248	0.241	0.242	0.250	0.248	0.243	0.243	0.244	0.25
y_5	0.206	0.209	0.207	0.204	0.199	0.208	0.203	0.212	0.208	0.206	0.21
x_5	0.021	0.021	0.011	0.015	0.021	0.020	0.024	0.017	0.022	0.018	0.02

2.12. TESTIRANJE HIPOTEZA

Pri tretiranju geodetskih mreža i analizi geodetskih deformacionih merenja testiranje hipoteza igra veoma važnu ulogu. Na pr. pri ispitivanju homogenosti rezultata merenja u seriji i između serija, kontroli grubih i sistematskih grešaka i njihovoj eliminaciji, analizi stabilnosti osnovnih tačaka, analizi pomeranja tačaka objekta i dr.

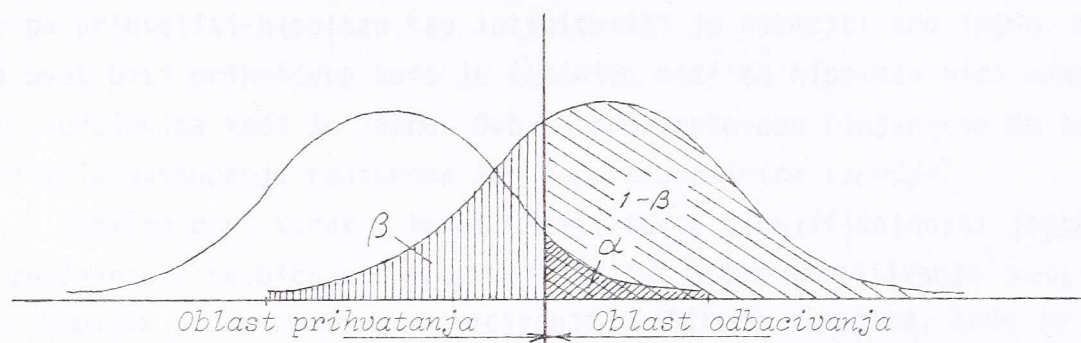
U mnogim udžbenicima MATEMATIČKE STATISTIKE [23], [24], [29] i dr. razmatrano je do u detalje testiranje hipoteza. Zato se ovde samo u kraćim crtama iznosi materija neophodna za bolje razumevanje daljih razmatranja u radu. Postoje razne metode provere hipoteza. One ne daju apsolutan odgovor da li je hipoteza tačna ili pogrešna već samo donose sud o tačnosti hipoteze sa verovatnoćom bliskom jedinici. Provera statističkih hipoteza naziva se *testiranje hipoteza*, a metode za proveru hipoteza nazivaju se testovi. Polazi se uvek od jedne osnovne hipoteze koja se naziva *nulta hipoteza* H_0 . Nulta hipoteza testira se istovremeno sa hipotezom koja je sa njom u suprotnosti i ona se naziva *alternativna hipoteza* H_A . Usvajajući nultu hipotezu H_0 odgovarajuća veličina - *test veličina*, koja je linearna funkcija rezultata merenja predstavlja jednu slučajnu promenljivu koja ima odgovarajuću raspodelu. Pomoću te raspodele može se naći interval (kritične granice) za koji se tvrdi da sa unapred datom verovatnoćom, na pr. 95%, sadrži ispitivani parametar osnovnog skupa. Ako izračunata vrednost test veličine pada u taj interval - *interval poverenja* tada nema razloga da se ne prihvati nulta hipoteza, i eventualna odstupanja od nulte hipoteze u 5% slučajeva imaće slučajni karakter. Ako, međutim, izračunata vrednost test veličine ne pada u interval poverenja onda, nam je to slučajno odstupanje (zbog grešaka merenja), ili je pogrešna nulta hipoteza; ali ona se odbacuje sa rizikom 5% i kaže se "odstupanja od nulte hipoteze H_0 značajna su (signifikatna su)". To znači da u 5% slučajeva H_0 može biti tačno, ali se ipak odbacuje.

Pri testiranju hipoteze moguća su četiri slučaja:

- a) H_0 je istinito, H_0 je prihvaćeno sa verovatnoćom $1-\alpha$
- b) H_0 je istinito, H_0 je odbačeno sa verovatnoćom α ,
- c) H_0 je lažno, H_0 je odbačeno sa verovatnoćom $1-\beta$.
- d) H_0 je lažno, H_0 je prihvaćeno sa verovatnoćom rizikom β .

Ako se desio slučaj (1) ili (c), onda testiranje hipoteza daje korektan rezultat. Slučaj (b) dovodi do *greške I vrste*; odbačena je istinita hipoteza H_0 sa

verovatnoćom α , broj $100\alpha\%$ poznat je kao *nivo značajnosti* testa. Slučaj (d) dovodi do *greške II vrste*, prihvaćena je hipoteza sa verovatnoćom rizika β . Verovatnoća $\gamma=1-\beta$ poznata je kao *moć testa*.



Sl. 2.12.1 Nulta i alternativna hipoteza

Da bi se izbegla greška I i II vrste treba da budu α i β što je moguće manji. Na slici 2.12.1 se vidi da su ovo suprotni zahtevi, jer da bi α bilo manje kritičnu vrednost treba pomeriti u desno a tada β raste (moć testa opada) i obrnuto. Znači, vrlo je važno birati, od svih testova, one testove koji imaju veliku moć (verovatnoća da se ne čini greška II vrste) a mali rizik. Kao test veće moći prepoznaje se onaj koji, za isti nivo značajnosti α , ima manju verovatnoću greške II vrste (β) od drugog testa. Dalje postoji takav test čija je verovatnoća greške I vrste manja ili jednaka od fiksirane vrednosti α ($0 < \alpha < 1$) za svaki parametar iz oblasti prihvatanja H_0 i pri tom verovatnoća greške II vrste najmanja, odnosno moć testa $1-\beta$ najveća za svaki parametar iz oblasti odbacivanja H_0 .

Poznato je da se merenja koja su opterećena sistematskim greškama raspoređuju oko izvesne vrednosti ξ koja je različita od istinite vrednosti ξ_0 , pa je sistematska greška $\delta=\xi-\xi_0$. Ispitivanje sistematskih grešaka moguće je sprovesti ako je: a) poznato ξ_0 , b) nepoznato ξ_0 ; c) poznato σ , d) nepoznato σ (uvodi se ocena $\hat{\sigma}$). Kada se izračuna \bar{x} za n merenja postavlja se pitanje da li se to \bar{x} razlikuje signifikantno od ξ_0 , toliko da se ne sme usvojiti da je sredina populacije $\xi = M(x)$ upravo istinita vrednost ξ_0 .

u-test. Uopšte kada je dato n opažanja normalno raspoređenih sa poznatim σ^2 i nepoznatom sredinom ξ tada je moguće testirati hipotezu $H: \xi = \xi_0$. Ako je hipoteza tačna tada je sredina (\bar{x}) opažanja normalno raspoređena oko ξ_0 sa standardnim odstupanjem σ/\sqrt{n} i za veličinu u važi

$$u = \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1) \quad (2.12.1)$$

U zavisnosti da li je veličina u mala ili velika prihvatamo ili odbacujemo hipotezu o jednakosti sredina ξ i ξ_0 . Potrebno je izabrati nivo značajnosti i ispitati da li veličina u (2.12.1) pada unutar granica značajnosti ili ne pa prihvatiti hipotezu kao istinitu ili je odbaciti kao lažnu. Neće hipoteza uvek biti prihvaćena kada je istinita niti će hipoteza biti odhaćena u svim slučajevima kada je lažna. Ovo je prouzrokovano činjenicom da test ne otkriva mala odstupanja *testirane hipoteze od „istinite teorije“*.

Obično prvi korak u konstrukciji testa signifikantnosti jeste izbor nivoa značajnosti (uobičajeno 0,01 ili 0,05) a zatim odredjivanje kritične oblasti tako da je verovatnoća odbacivanja testirane hipoteze, kada je istinita, jednaka α .

Ako je testirana hipoteza istinita t.j. $M(x) = \xi_0$ tada će test dovesti do pogrešnog zaključka (odbacivanje testirane hipoteze) u $100\alpha\%$ slučajeva i do pravog zaključka (prihvatanje hipoteze) u $100(1-\alpha)\%$ slučajeva.

Ako je međjutim, testirana hipoteza lažna t.j. $M(x) = \xi_1 \neq \xi_0$ tada verovatnoća padanja vrednosti \bar{x} van kritične oblasti zavisi od ξ_1 ([23]). Sa oznakom

$$\pi(\xi_1) = P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\alpha}; M(x) = \xi_1 \right\} \quad (2.12.2)$$

uvodeći smenu

$$\frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \xi_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \lambda_1 \quad (2.12.3)$$

gde je

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.12.4)$$

dobija se

$$\pi(\xi_1) = P \left\{ \frac{\bar{x} - \xi_1}{\sigma/\sqrt{n}} + \lambda_1 > u_{1-\alpha}; M(x) = \xi_1 \right\} \quad (2.12.5)$$

$$= \Phi(u_{1-\alpha} - \lambda_1) + \Phi(-u_{1-\alpha} - \lambda_1) .$$

Ovde je $\frac{\bar{x} - \xi_1}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ sa $M(x) = \xi_1$.

Verovatnoća $\pi(\xi_1)$ zove se *MOĆ* testa i povezana je sa alternativnom hipotezom $M(x) = \xi_1 \neq \xi_0$.

Ako je $M(x) = \xi_1$ tada će test dovesti do pravog zaključka t.j. do odbacivanja testirane hipoteze sa verovatnoćom datom pomoću *moći* testa i do pogrešnog zaključka, t.j. prihvatanja testirane hipoteze, sa verovatnoćom

$$\beta = 1 - \text{moć testa.}$$

Primenom testa može se izvući pogrešan zaključak: a) odbacivanje testirane hipoteze kada je istinita (greška prve vrste) sa verovatnoćom α (nivo značajnosti testa); b) odbacivanje testirane hipoteze kada je lažna (greška druge vrste) sa verovatnoćom $\beta = 1 - \text{moć testa.}$

Funkcija moći daje verovatnoću odbacivanja testirane hipoteze t.j. daje verovatnoću davanja korektnog zaključka za sve moguće vrednosti ξ različite od ξ_0 a za $\xi = \xi_0$ daje verovatnoću davanja pogrešnog zaključka.

Kada je skup alternativnih vrednosti definisan kao $\xi \neq \xi_0$ tada je funkcija moći

$$\pi(\xi) = P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\alpha}; M(x) = \xi \right\} = \phi(-u - \lambda) + \phi(u + \lambda) \quad (2.12.6)$$

gde je

$$\lambda = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Ako je razlika između ξ i ξ_0 mala i moć testa je mala što znači da test neće u mnogim slučajevima otkriti lažne hipoteze.

Kritična oblast, za α nivo značajnosti, dvostranog U -testa je

$$\left| \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\alpha/2} \quad (2.12.7)$$

$$P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\alpha}; M(x) = \xi_0 \right\} = \alpha \quad (2.12.8)$$

Odgovarajuća funkcija moći je

$$\begin{aligned} \pi(\xi) &= P \left\{ \left| \frac{\bar{x} - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| > u_{1-\alpha/2}; M(x) = \xi \right\} \\ &= \phi(u_{\alpha/2} - \lambda) + \phi(u_{\alpha/2} + \lambda), \end{aligned} \quad (2.12.9)$$

gde je
$$\lambda = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

U slučaju kada postoje dva različita testa iste hipoteze sa istim nivoom značajnosti α (5%) tada se upoređenjem funkcija moći bira jedan (bolji) od dva testa.

Jednom testu se može dati prednost u odnosu na neki drugi test ako za sve moguće alternativne vrednosti nepoznatog parametra ima veću moć od drugog t.j. ako daje veću verovatnoću otkrivanja neistinite hipoteze od drugog testa. Kada god postoji test sa funkcijom moći koja je veća od funkcije moći nekog drugog testa prednost se daje ovom testu koji je uniformno veće moći od svih drugih.

Ako je poznato apriori da je alternativna hipoteza $\xi > \xi_0$ tada se prednost daje ovom jednostranom testu u odnosu na dvostrani ($\xi \neq \xi_0$) zato što ima veću moć. Jednostrani test, za testiranje hipoteze $\xi = \xi_0$ prema alternativnoj $\xi > \xi_0$, je uniformno veće moći, od obostranog testa sa alternativom $\xi \neq \xi_0$.

Funkcija moći zavisi od broja opažanja. Ova činjenica može se koristiti kod planiranja merenja za određivanje broja opažanja neophodnih za dobijanje određene moći t.j. za određivanje broja neophodnih opažanja da se obezbedi sigurno prihvatanje testirane hipoteze.

Koristeći formulu za funkciju moći, kod testiranja hipoteze $\xi = \xi_0$ protiv alternativne hipoteze $\xi = \xi_1$ ($\xi_1 > \xi_0$) za $\alpha = 5\%$ nivo značajnosti; dobija se formula za računanje neophodnog broja opažanja

$$\sqrt{n} = 2 \cdot 1,64 \frac{\sigma}{\xi_1 - \xi_0} \quad (2.12.10)$$

Osim do sada opisanog u -testa koriste se χ^2 , t - i F -test, što zavisi od veličina koje se ispituju, t.j. kakvu raspodelu verovatnoća imaju ispitivane veličine i njihovi odnosi:

χ^2 -test. Hipoteza $M(m_0^2) = \sigma_0^2$ protiv alternativne hipoteze $\sigma^2 > \sigma_0^2$ testira se χ^2 -testom zato što je $m_0^2/\sigma_0^2 \sim \chi^2/f$ ako važi hipoteza $M(m_0^2) = \sigma_0^2$. Kritična oblast za α nivo značajnosti je ($|23|$)

$$\frac{m_0^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{\chi_{1-\alpha}^2}{f} \quad (2.12.12)$$

Moć testa u vezi sa alternativnom hipotezom $M(m_0^2) = \sigma^2$ ($M(m_0^2) \neq \sigma_0^2$) je

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma^2) &= P\left(\frac{m_o^2}{\sigma_o^2} > \frac{\chi^2_{1-\alpha}}{f}; M(m_o^2) = \sigma^2\right) \\
&= P\left(\frac{f m_o^2}{\sigma_o^2} > \frac{\sigma_o^2}{\sigma^2} \chi^2_{1-\alpha}; M(m_o^2) = \sigma^2\right) \\
&= P(\chi^2 > \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{1-\alpha})
\end{aligned} \tag{2.12.13}$$

gde je $\lambda^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_o^2}$ (2.12.14)

Vrednost λ^2 se izračunava iz jednačine

$$\pi(\sigma^2) = P(\chi^2 > \frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{1-\alpha}) = 1 - \beta, \tag{2.12.15}$$

odavde sledi

$$\frac{1}{\lambda^2} \chi^2_{1-\alpha} = \chi^2_{\beta},$$

ili

$$\lambda^2 = \frac{\chi^2_{1-\alpha}}{\chi^2_{\beta}}, \tag{2.12.16}$$

što znači za dato α i f i izabrano β treba sračunati λ^2 po formuli (2.12.16). U koordinatnom sistemu $(\lambda^2, 1-\beta)$ crta se (na logaritamskom papiru) kriva moći. Ova kriva moći može da se koristi sa dovoljnom sigurnošću za praktičnu upotrebu (123/). Za velike vrednosti f koristi se približna formula

$$f \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{1-\beta}^{\lambda} + u_{1-\alpha}}{\lambda - 1} \right)^2. \tag{2.12.17}$$

Ako je alternativna hipoteza $\sigma^2 < \sigma_o^2$ tada je kritična oblast za α nivo značajnosti

$$\frac{m_o^2}{\sigma_o^2} < \frac{x_{\alpha}^2}{f} \tag{2.12.18}$$

Dalje je analogno (2.12.13)

$$\pi(\sigma^2) = P(\chi^2 < \frac{1}{\lambda^2} \chi_\alpha^2) \quad (2.12.19)$$

za
$$\lambda^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}$$

i analogno (2.12.15 i 2.12.16)

$$\lambda^2 = \frac{\chi_\alpha^2}{\chi_{1-\beta}^2} \quad (2.12.20)$$

Bolje je koristiti gornja dva jednostrana testa ($\sigma^2 > \sigma_0^2$ ili $\sigma^2 < \sigma_0^2$) nego dvostrani $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ jer su jednostrani testovi uniformno veće moći za testiranje hipoteze $M(m_0^2) = \sigma_0^2$ protiv $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (ili $\sigma^2 < \sigma_0^2$).

F-test. Ako nije poznato σ_0^2 tada se mogu koristiti nezavisne ocene m_1^2 i m_2^2 , i u tom slučaju više se nemože koristiti χ^2 -test već mora *F-test*. Uobičajeno je da se testira hipoteza $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ t.j. $\lambda^2 = 1$ protiv jednostrane alternativne hipoteze $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$, ili dvostrane alternativne: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Ovo testiranje se koristi na pr. kod ispitivanja homogenosti rezultata merenja u seriji i između serija, kod utvrđivanja stabilnosti tačaka i slično.

Neka se prvo testira slučaj kada je alternativna hipoteza $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$. Ako je testirana hipoteza istinita tada je ($|23|$)

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} \sim F(f_1, f_2) \quad , \quad (2.12.21)$$

tako da je kritična oblast za α nivo značajnosti

$$\frac{m_1^2}{m_2^2} > F_{1-\alpha}(f_1, f_2) \quad . \quad (2.12.22)$$

Moć testa u vezi sa alternativnom hipotezom $\lambda^2 > 1$ je

$$\pi(\lambda^2) = P\left(\frac{m_1^2}{m_2^2} > F_{1-\alpha}(f_1, f_2; \lambda^2)\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\frac{m_1^2/\sigma_1^2}{m_2^2/\sigma_2^2} > \frac{1}{\lambda^2} F_{1-\alpha}(f_1, f_2); \lambda^2\right) \\
 &= P(F(f_1, f_2) > \frac{1}{\lambda^2} F_{1-\alpha}(f_1, f_2)) \quad (2.12.23)
 \end{aligned}$$

Za odredjivanje vrednosti λ^2 za koju je funkcija moći uzela neku vrednost $1-\beta$ koristi se

$$\pi(\lambda^2) = P(F(f_1, f_2) > \frac{1}{\lambda^2} F_{1-\alpha}(f_1, f_2)) = 1-\beta \quad (2.12.24)$$

i dobija analogno (2.12.16)

$$\lambda^2 = \frac{F_{1-\alpha}(f_1, f_2)}{F_{1-\beta}(f_1, f_2)} = F_{1-\alpha}(f_1, f_2) F_{1-\beta}(f_1, f_2) \quad (2.12.25)$$

Pomoću (2.12.22) i odgovarajućih tablica F raspodele moguće je izračunati neophodan broj stepeni slobode f_1, f_2 (broj opažanja) da bi se izabrala jedna od mogućih hipoteza t.j. koliko treba izvršiti opažanja da se sigurno izabere prava (dotična) hipoteza.

Ako nije moguće apriori odlučiti, ili $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, ili $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, tada se mora koristiti za alternativnu hipotezu $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

t-test. Kod *u*-testa testirana je hipoteza $\xi = \xi_0$ pomoću sredine \bar{x} i standardnog odstupanja σ . Kako je najčešće σ nepoznato to se umesto σ koristi ocena m_0 i tada *u*-test prelazi u *t*-test. Ako je test hipoteza $M(x) = \xi_0$ istinita veličina, tada

$$t = \frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} \quad (2.12.26)$$

ima studentovu raspodelu sa f stepeni slobode, tj.

$$t \sim t_f$$

Ako je alternativna hipoteza $\xi > \xi_0$ kritična oblast za α (nivo značivosti) je

$$\frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha} \quad (2.12.26)$$

a ako je alternativna hipoteza $\xi \neq \xi_0$ tada je kritična oblast definisana sa

$$\frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2} \quad \text{i} \quad \frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha/2} . \quad (2.12.27)$$

Za (2.12.26) moć testa je

$$\pi(\xi) = P\left(\frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} > t_{1-\alpha}; \quad M(\bar{x}) = \xi \right) \quad (2.12.28)$$

Dalje je

$$\frac{\bar{x} - \xi_0}{m_0/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \xi}{m_0/\sqrt{n}} + \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \frac{\sigma}{m_0} = t + \lambda \sqrt{f/\chi^2} \quad (2.12.29)$$

i

$$\lambda = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma \sqrt{n}}$$

Funkcija moći zavisi od kombinacije t i χ^2 raspodele koja se zove ne-centralna t -raspodela.

Može se naći aproksimativna formula zasnovana na normalnoj raspodeli: Treba (2.12.28) napisati u obliku

$$\pi(\xi) = P\left(\bar{x} - t_{1-\alpha} \frac{m_0}{\sqrt{n}} > \xi_0; \quad M(\bar{x}) = \xi \right) \quad (2.12.30)$$

i uvesti pomoćnu promenljivu

$$z = \bar{x} - t_{1-\alpha} \frac{m_0}{\sqrt{n}} \quad (2.12.31)$$

kada se za funkciju moći, za jednostrani test, dobija

$$\pi(\xi) \simeq \Phi\left(\frac{t_{\alpha} + \lambda}{\sqrt{1 + \frac{t_{1-\alpha}^2}{2f}}} \right), \quad \lambda = \frac{\xi - \xi_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad (2.12.32)$$

Jednostrano se dobija za dvostrani test

$$\pi(\xi) \simeq \Phi \left(\frac{t_{\alpha/2} + \lambda}{\sqrt{1 - \frac{t_{\alpha/2}^2}{2f}}} \right) + \Phi \left(\frac{t_{\alpha/2} + \lambda}{\sqrt{1 + \frac{t_{\alpha/2}^2}{2f}}} \right) \quad (2.12.33)$$

Na osnovu funkcija moći (2.12.5), (2.12.13), (2.12.23), (2.12.28) crtaju se krive moći testa koje predstavljaju operativnu karakteristiku moći testa. To znači da na osnovu krivih moći testa može se izvršiti optimalan izbor verovatnoće grešaka prve vrste, grešaka druge vrste (a samim tim moći testa), broja rezultata merenja i tačnosti merenja.

3. SADAŠNJE STANJE I ZADACI ANALIZE GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA

Godinama su se geodeti bavili ispitivanjem ponašanja objekata i tla i analizama nastalih deformacija. Stepenn uspešnosti ovih ispitivanja i analiza najviše je zavisila od stepena razvoja geodetske nauke u ovim oblastima. Kao posledica toga nastao je veliki broj metoda za analizu geodetskih deformacionih merenja. Uočavajući postojanje velikog broja postupaka, na Drugom simpozijumu FIG-ine komisije za Inženjersku geodeziju (komisija 6) koji je održan u Bonu 1978.g., osnovan je *komitet za analizu deformacionih merenja*. Zadatak ovog komiteta je bio da ispita različite metode analize deformacionih merenja koristeći iste rezultate merenja (iste kontrolne mreže). U početku je u sastav komiteta uključeno samo pet istraživačkih centara kratko nazvani: Hanover, Minhen, Delft, Karlsruhe i Fredericton (Kanada). Razlozi za ograničeno članstvo bili su ti što su istraživački centri locirani relativno blizu jedan drugog, osim Kanadske grupe kako bi se olakšala razmena informacija i organizacija radnih sastanaka. Osim toga ovo su najveći istraživački centri na svetu koji imaju veoma zapažen uspeh u proučavanju analize deformacionih merenja. Kao glavni cilj rada ovog komiteta je da temeljno prouči, a zatim predloži postupke za rešavanje sledećih problema u analizi deformacionih merenja:

- izbor optimalnih konfiguracija i plana opažanja;
- zaštita opažanja;
- računaska strategija za odredjivanje pomeranja i deformacija;
- metode statističke analize deformacionih merenja.

Na sledećem Trećem FIG-imom simpozijumu o deformacionim merenjima koji je održan u Budimpešti 1982.g., komitet za analizu je proširen na 16 istraživačkih centara i dogovoreno je da se izučavaju sledeće pod-teme

- optimizacija i oblikovanje mreža sa geodetskim i negeodetskim merenjima;
- razvoj opažanja, otkrivanje grubih i sistematskih grešaka i korelacija opažanja;
- geometrijska analiza (uključujući i statističko testiranje) deformacija za
 1. statički model
 2. kinematički model
 3. dinamički model;

- fizička interpretacija (uključujući statističko testiranje) deformacija.

Dosadašnja izučavanja pet poznatih postupaka koristeći realne i simulirane mreže nisu dala prednost ni jednom od navedenih postupaka.

Još uvek ne postoji saglasnost ni jedinstveno mišljenje o vodećoj metodi već i nadalje svaki istraživački centar daje prednost svojoj metodi.

U glavi 4 će biti prikazani najpoznatiji postupci analize deformacionih merenja sa svim njihovim karakteristikama. Osim toga u glavi 6 biće prikazan i postupak koga je razradio kandidat u ovom radu kao prilog opštim naporima da se analiza merenja deformacija poboljša.

4. POSTOJEĆE METODE (POSTUPCI)

4.1. PELCEROV (PELZER) POSTUPAK

Ovaj postupak analize geodetskih deformacionih merenja (poznat je kao Hanoverski postupak) prikazan je u radovima Pelzera (1971, 1974, 1976^b), Niemeier-a (1976) i Dupraz, Niemeir, Pelzer (1979^b). Osnovna karakteristika ovog postupka je testiranje globalne podudarnosti koristeći izračunato srednje neuklapanje dva puta premerene mreže i ispitivanje da li su prisutna signjifikatna pomeranja tačaka (nastala izmedju dva premeravanja mreže - dve serije).

4.1.1. Izravnanje pojedinih serija

Za odredjivanje koordinata tačaka mreže, u prvom koraku, sprovodi se za obe merne epohe ($i=0,1$) odvojeno izravnanje po metodi posrednog izravnanja. Pri tom se usvaja da merenja nisu korelisana. Zatim se sprovodi kontrola i odbacivanje opažanja koja sadrže grube greške i definitivno odredjuje težina opažanja.

Sistem jednačina popravaka ili funkcionalni model je

$$l_i + v_i = A_i x_i, \quad i=0,1, \quad (4.1.1)$$

dok stohastički model glasi

$$M(v_i) = 0 \text{ sa } K_{l_i} = \sigma^2 Q_{l_i} = \sigma^2 P^{-1} l_i \quad i=0,1,$$

gde su:

- l_i - vektor opažanja
- v_i - vektor popravaka
- A_i - matrica koeficijenta jednačina popravaka
- x_i - vektor nepoznatih
- Q_{l_i} - matrica koeficijenta težina
- $i=0,1$ - epohe merenja (nulta i prva)
- σ^2 - disperzija jedinice težine.

Za pojedine epohe dobijaju se normalne jednačine

$$A_i^T Q_{l_i}^{-1} A_i x_i = A_i^T Q_{l_i}^{-1} l_i, \quad i=0,1, \quad (4.1.2)$$

ili

$$N_i x_i = n_i \quad \text{sa} \quad N_i = A_i^T Q_{l_i}^{-1} A_i, \quad n_i = A_i^T Q_{l_i}^{-1} l_i \quad i=0,1. \quad (4.1.3)$$

U slučaju da sve tačke u mreži nisu identične u obe serije treba eliminisati neidentične tačke pre nego se pristupi pronalaženju inverzije.

Ako se sistem jednačina popravaka napiše u obliku

$$l_i + v_i = \begin{bmatrix} A & B \\ & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad (4.1.4)$$

gde su

x_i - vektor koordinata identičnih tačaka

y_i - vektor koordinata neidentičnih tačaka

A_i - matrica koeficijenata za vektor x_i

B_i - matrica koeficijenata za vektor y_i

onda normalne jednačine glase

$$\begin{bmatrix} A^T P A & A^T P B \\ B^T P A & B^T P B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P l \\ B^T P l \end{bmatrix}, \quad (4.1.5)$$

ili skraćeno

$$\begin{bmatrix} N_{AA} & N_{AB} \\ N_{BA} & N_{BB} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} n_A \\ n_B \end{bmatrix}_i, \quad (4.1.6)$$

pri čemu se vektor koordinata y_i neidentičnih tačaka može prethodno eliminisati. Sa oznakama

$$N = N_{AA} - N_{AB} N_{BB}^{-1} N_{BA} \quad (4.1.7)$$

$$n = n_A - N_{AB} N_{BB}^{-1} n_B, \quad (4.1.8)$$

posle ove transformacije (eliminacije vektora nepoznatih za neidentične tačke) preostaje sistem normalnih jednačina za identične tačke

$$N_i x_i = n_i. \quad (4.1.9)$$

Ako nije moguće a priori utvrditi stabilne tačke tada postoje mala pomeranja u pravcu x i y osa i malo okretanje celog koordinatnog sistema (reč je o neodredjenom položaju i orijentaciji), a ako nisu merene dužine tada je razmera neodredjena. Ovo znači da je matrica N singularna i ima defekt ranga 3 ili 4.

Postoje razne metode za nalaženje inverzije singularnih matrica. Ovde se za računanje matrice Q koja odgovara uslovu

$$\text{trag } Q = \min \quad (4.1.10)$$

koristi formula

$$Q = (N + GG^T)^{-1} - GG^T, \quad (4.1.11)$$

gde je G matrica normiranih (jediničnih) vektora sopstvenih vrednosti nula matrice N .

Za računanje pseudoinverzije matrice N koristi se spektralno razlaganje matrice normalnih jednačina N_i :

$$N_i = \begin{bmatrix} H_i & G_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{H_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} = H_i \Lambda_{H_i} H_i^T \quad (4.1.12)$$

gde je

Λ_{H_i} - spektralna matrica sopstvenih vrednosti $\lambda_i > 0$

H_i - modalna matrica za sopstvene vrednosti $\lambda_i > 0$

G_i - modalna matrica za isčezle sopstvene vrednosti ($\lambda_i = 0$).

Tada se MUR-PENROUZOVA-pseudoinverzija računa po formuli

$$N_i^+ = H_i \Lambda_{H_i}^{-1} H_i^T \quad (4.1.13)$$

pri čemu se lako izračunava $\Lambda_{H_i}^{-1}$ iz recipročnih vrednosti sopstvenih vrednosti koje nisu isčezle ($\lambda_i > 0$). Matrica Q_{x_i} je jednaka N_i^+ , t.j.

$$Q_{x_i} = N_i^+ . \quad (4.1.14)$$

Ocene nepoznatih dobijaju se sa

$$\hat{x}_i = Q_i n_i \quad (4.1.14)$$

pri čemu je svejedno da li se za računanje matrice koeficijenata težine koristi formula (4.1.11) ili (4.1.14).

Ocene popravaka dobijaju se sa

$$\hat{v}_i = A_i \hat{x}_i - l_i . \quad (4.1.15)$$

Sada je moguće izračunati ocenu s standardnog odstupanja σ (ocena se često naziva srednja greška a posteriori)

$$s_i = \sqrt{\frac{\hat{v}_i^T P_i \hat{v}_i}{f_i}} , \quad (4.1.16)$$

gde je

f_i - broj suvišnih merenja ($f_i = n_i - u_i + d_i$)

n_i - broj opažanja

u_i - broj nepoznatih (koordinate i orijentacije)

d_i - defekt ranga matrice N_i

Radi testiranja homogenosti tačnosti dveju serija potrebno je da je očekivana vrednost od s_i ista u obe serije, t.j. treba da važi hipoteza

$$H : (s_1^2) = E(s_2^2) = \sigma^2 \quad (4.1.17)$$

Test veličina je

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F_{f_1, f_2} \quad \text{pri } s_1^2 > s_2^2, \quad (4.1.18)$$

ili

$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} \sim F_{f_2, f_1} \quad \text{pri } s_2^2 > s_1^2, \quad (4.1.19)$$

pa ako je

$$F < F_{1-\alpha, f_1, f_2} \quad (4.1.20)$$

onda prihvatamo hipotezu o jednakosti disperzija (o homogenosti tačnosti) u obe serije. U slučaju prihvatanja ove hipoteze može se dobiti bolja ocena za σ^2 po formuli

$$s^2 = \frac{f_0 s_0^2 + f_1 s_1^2}{f}, \quad f = f_0 + f_1 \quad (4.1.21)$$

4.1.2. Globalni test podudarnosti mreže

Druga ocena (θ) za standardno odstupanje σ , nezavisna od ocene s , može se izračunati ako se izračunate koordinate obe serije merenja napasuju jedna na drugu Helmertovom transformacijom. Vektor preostalih neuklapanja je posle ove transformacije

$$d = \hat{x}_1 - \hat{x}_0 \quad (4.1.22)$$

a njihova matrica koeficijenata težina

$$Q_d = Q_{x_0} + Q_{x_1} \quad (4.1.23)$$

je singularna.

Matrica težina P_d dobija se kao uopštena inverzija od Q_d (analogno (4.1.11)).

$$P_d = (Q_d + GG^T)^{-1} - GG^T \quad (4.1.24)$$

Ocena θ^2 - "srednje neuklapanje" računa se po formuli

$$\theta^2 = \frac{d^T P d}{h}, \quad (4.1.25)$$

gde je

h – broj linearno nezavisnih komponentata vektora d .

Količnik

$$\bar{F} = \frac{\theta^2}{s}, \quad (4.1.26)$$

u opštem slučaju, sledi jednu necentralnu F -raspodelu, ali kod kongruentnih mreža prelazi u centralnu F -raspodelu. Ovaj količnik (4.1.26) može se koristiti kao test veličina za testiranje nulte hipoteze

$$H_0 : M(\hat{x}_0) = M(\hat{x}_1), \quad (4.1.27)$$

to znači da nema deformacija u mreži (nema signifikatno pomerenih tačaka). Ako važi nulta hipoteza H_0 , nema deformacija, tada se obe ocene s i θ smeju razlikovati u okviru slučajnih grešaka i preostalo neuklapanje mora biti objašnjeno tačnošću merenja, pa u tom slučaju važe odnosi verovatnoća

$$P(\bar{F} < F_{1-\alpha, h, f} ; M(x_0) = M(x_1)) = \alpha, \quad (4.1.28)$$

gde je

h – broj linearno nezavisnih komponentata vektora d ;

$f = f_0 + f_1$ ukupan broj suvišnih merenja (iz oba izravnjanja)

Sa verovatnoćom $1-\alpha = 95\%$ prihvata se nulta hipoteza, u protivnom odbacuje se. Ako je H_0 odbačeno sa velikom sigurnošću se može govoriti o postojanju deformacija u mreži (mreže nisu kongruentne). Drugim rečima pomeranja α ne mogu biti objašnjena kao slučajna odstupanja (zbog grešaka merenja) već se mora doneti zaključak da se radi o signifikantnim deformacijama dela ili cele mreže. Ovaj test (4.1.27) kojim se ispituje kongruencija mreže naziva se *globalni test* podudarnosti cele mreže ili dela mreže. Globalni test (4.1.17) koristi se (sa neznatnim promenama) za dalju analizu: ispitivanje stabilnosti osnovnih tačaka, za pronalaženje nestabilnih tačaka i za odredjivanje pomeranja tačaka na objektu.

4.1.3. Globalni test za ispitivanje stabilnosti osnovnih tačaka

Ako test (4.1.27) ukaže na postojanje signifikantnih deformacija treba lokalizovati osnovne tačke koje su nestabilne t.j. pronaći osnovne tačke zbog čijeg pomeranja nije prihvaćena nulta hipoteza H_0 o podudarnosti cele mreže koja je dva puta premerena. Ova lokalizacija se sprovodi iz razloga da se tačno odredi apsolutna deformacija tačaka na objektu.

Osnovna ideja metode lokalizacije sastoji se u tome da se srednje neuklapanje θ^2 (4.1.25) razloži u dva nezavisna sumarna vektora: vektor d_s koji sadrži komponente osnovnih tačaka i vektor d_o koji sadrži komponente tačaka na objektu

$$d = \begin{bmatrix} d_s \\ d_o \end{bmatrix} \quad (4.1.29)$$

Saglasno ovoj podeli, deli se odgovarajuća matrica težina P_d

$$P_d = \begin{bmatrix} P_{ss} & P_{so} \\ P_{os} & P_{oo} \end{bmatrix} \quad (4.1.30)$$

Sada je kvadratna forma iz (4.1.25)

$$d^T P_d d = d_s^T P_{ss} d_s + 2d_s^T P_{so} d_o + d_o^T P_{oo} d_o \quad (4.1.31)$$

Ako se uvede transformacija

$$\bar{d}_o = d_o + P_{oo}^{-1} P_{os} d_s \quad (4.1.32)$$

$$\bar{P}_{ss} = P_{ss} - P_{so} P_{oo}^{-1} P_{os}, \quad (4.1.33)$$

tada (4.1.31) postaje

$$d^T P_d d = d_s^T \bar{P}_{ss} d_s + \bar{d}_o^T P_{oo} \bar{d}_o. \quad (4.1.34)$$

Na ovaj se način ukupno neuklapanje deli na deo neuklapanja osnovnih tačaka

i deo neuklapanja tačaka na objektu. Podесnom podelom moguće je da se sračuna srednje neuklapanje za svaku grupu tačaka a samim tim i za svaku pojedinačnu tačku.

Koristeći (4.1.34) može se izračunati *srednji rascep* osnovnih tačaka

$$\theta_s^2 = \frac{\bar{d}_{ss}^{T-P} d_s}{h_s}, \quad (4.1.35)$$

gde je h_s broj komponenti vektora \bar{d}_s umanjen za sniženi rang sistema. Ovde treba napomenuti da je uklapanje mreže uradjeno (helmertovom transformacijom) samo u osnovnim tačkama, pa su u (4.1.35) sadržana preostala neuklapanja posle Helmerlove transformacije za osnovne tačke. Globalni test za osnovne tačke sledi iz

$$P \left\{ \frac{\theta_s^2}{s^2} > F_{1-\alpha, h_s, f} | H_0 \right\} = \alpha. \quad (4.1.36)$$

Ako se ovaj test prihvati, t.j. ako je θ_s^2/s^2 veće od granične vrednosti $F_{1-\alpha; h_s, f}$ tada se može govoriti da medju osnovnim tačkama ima signifikantno pomerenih tačaka. U protivnom smatraće se za dalja računanja da su sve osnovne tačke stabilne.

4.1.4. Lokalizacija nestabilnih osnovnih tačaka

Ako globalni test ukaže da ima signifikantno pomerenih osnovnih tačaka treba sprovesti dalje testiranje. Zato treba vektor \bar{d}_s podeliti na dva subvektora: \bar{d}_B koji sadrži samo dve komponente koordinate tačke koja se uzima kao da je nestabilna i \bar{d}_F koji sadrži komponente za ostale tačke,

$$\bar{d}_s = \begin{bmatrix} \bar{d}_F \\ \bar{d}_B \end{bmatrix}, \quad (4.1.37)$$

i saglasno tome podeliti i pripadajuću matricu

$$\bar{P}_{ss} = \begin{bmatrix} P_{FF} & P_{FB} \\ P_{BF} & P_{BB} \end{bmatrix}. \quad (4.1.38)$$

Sa transformacijom (slično (3.1.19) i (3.1.20))

$$\bar{d}_B = d_B + P_{BB}^{-1} P_{BF} d_F \quad (4.1.39)$$

$$\bar{P}_{FF} = P_{FF} - P_{FB} P_{BB}^{-1} P_{BF}, \quad (4.1.40)$$

pa se kvadratna forma (4.1.35) deli u dva sumanda

$$d_s^T \bar{P}_{ss} d_s = d_F^T \bar{P}_{FF} d_F + \bar{d}_B^T \bar{P}_{BB} \bar{d}_B. \quad (4.1.41)$$

Drugi sumand sadrži deo neuklapanja onih tačaka koje su uzete kao da su nestabilne, a prvi sumand neuklapanja preostalih tačaka. Sa formulama (4.1.37) do (4.1.41) može da se proračuna udeo uklapanja za svaku osnovnu tačku za koju se pretpostavlja (uzima) da je nestabilna. Srednje neuklapanje za svaku tačku je

$$\theta_j^2 = \left(\frac{\bar{d}_B^T \bar{P}_{BB} \bar{d}_B}{2} \right)_j, \quad j=1, 2, \dots, k. \quad (4.1.42)$$

Dalje treba naći

$$\theta_{max}^2 = \max (\theta_j^2, \quad j=1, 2, \dots, k), \quad (4.1.43)$$

i tačka kojoj odgovara θ_{max}^2 izbacuje se iz skupa stabilnih tačaka i za dalja računanja smatra se nestabilnom.

Za preostalih $k-1$ tačaka treba ponoviti postupak tako da se prvo nađe preostali rascep

$$\theta_{REST}^2 = \frac{d_F^T \bar{P}_{FF} d_F}{h_s - 2}, \quad (4.1.44)$$

i upoređenjem

$$\frac{\theta_{REST}^2}{s} \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} F_{1-\alpha, h_s-2, f} |_{H_0}, \quad (4.1.45)$$

proveri da li i dalje ima deformacija. Ako ima deformacija treba primeniti formule (4.1.37) do (4.1.41) za preostale osnovne tačke i odbaciti tačku koja daje θ_{max}^2 . Ovaj postupak treba ponavljati sve dok test (4.1.45) ne pokaže da dalje nema deformacija. Na ovaj način osnovne tačke su podeljene na stabilne i nestabilne tačke.

4.1.5. Ispitivanje pomeranja tačaka na objektu

Sada je moguće konačno odrediti deformacije tačaka na objektu. U tom cilju treba podeliti vektor d i matricu P slično (4.1.29) i (4.1.30), pri čemu su u subvektoru d_F sadržane komponente za stabilne osnovne tačke a u d_O komponente tačaka na objektu i komponente nestabilnih tačaka.

$$d = \begin{bmatrix} d_F \\ d_O \end{bmatrix} \quad (4.1.46)$$

$$P_d = \begin{bmatrix} P_{FF} & P_{FO} \\ P_{OF} & P_{OO} \end{bmatrix}, \quad (4.1.47)$$

posle transformacije

$$\bar{d}_O = d_O + P_{OO}^{-1} P_{OF} d_F, \quad (4.1.48)$$

moguće je izračunati srednje neuklapanje

$$\theta_O^2 = \frac{\bar{d}_O^T P_{OO} \bar{d}_O}{h_O}, \quad (4.1.49)$$

gde je h_O broj komponenti od d_O .

Ukoliko su pomeranja tačaka na objektu velika relativno u odnosu na tačnost odredjivanja tačaka, tada nije neophodno sprovoditi detaljnu analizu pomeranja tačaka na objektu - koristeći (4.1.49), sa globalnim testom i lokalizacijom. Tada je dovoljno, da se primene približni postupci, tako na primer SIGNAL-RAUSCH-odnosi (signal-šum-odnosi) mogu da se posmatraju kao indikator za signjifikatna pomeranja. Treba odrediti standardno odstupanje svake komponente \bar{d}_j iz \bar{d}_O sa q_{jj} kao pripadajući dijagonalni element matrice P_{OO}^{-1} pri čemu se kao SIGNAL-RAUSCH-ODNOS dobija koeficijent

$$q = \frac{\bar{d}_j}{s_j}. \quad (4.1.50)$$

Svako \bar{d}_j koje je 5 puta veće nego njegovo standardno odstupanje smatra se statistički signifikantno, i pripadajuće tačke važe kao signifikantno pomerene.

Kod primene ovog postupka treba voditi računa o sledećem:

- nije neophodan isti plan opažanja za obe serije merenja. Takodje nije neophodna ni ista vrsta opažanja niti isti broj merenja u obe serije (može varirati broj vrsta opažanja),
- nije neophodno da se tačke mere u obe serije, mogu postojati i neidentične tačke ali je neophodno pre inverzije eliminisati neidentične tačke (koristeći formule (4.1.4)-(4.1.9).
- disperzija jedinice težine σ^2 mora za obe serije biti ista,
- za obe serije koriste se iste približne koordinate,
- nije neophodna (ne zahteva se) stroga analiza ako je za sve tačke objekta količnik q_j (odnos signala i širina) u najmanje jednom koordinatnom pravcu veći od 5.

Program za deformacionu analizu, uradjen u Hanoveru, prema gore izloženoj teoriji montiran je i osposobljen za upotrebu na računaru u IRC Gradjevin-skog fakulteta (kopija programa dobijena je od prof. H.Pelcera).

4.2. VELŠOV (WELSCH) POSTUPAK

Većina postupaka izvodi se pomoću statističkih testova, koji nul-hipotezu sličnosti preispituju preko koordinata tačaka ispitivane mreže. Na taj način može se ustanoviti da li pojedine tačke ili grupa tačaka remete konformnost i geometriju mreže. Proširenjem nulhipoteze sličnosti i za afinitet dobija se MINHENSKI postupak t.j. metoda strain analize. Parametri koji opisuju homogene deformacije (strain) identični su sa parametrima afinog preslikavanja koji transformišu telo iz deformisanog u originalni (početni) oblik. Strain parametri odredjuju se ili koristeći pomeranja tačaka (razlike koordinata) ispitivanog tela ili koristeći razlike ponovljenih opažanja izmedju ovih tačaka. Kod strain analize važno je da su statistike, koje ukazuju na značajne deformacije (strain) i parametri koji opisuju deformacije invarijante i nezavisne od koordinatnog sistema i izbora početnih parametara (geodetic datums).

Ovaj postupak (poznat je kao Minhen I postupak) detaljno ga je opisao CHRZANOWSKI i ostali 1981, 1982-a, WELSCH 1981, 1982-a, 1982-b, 1983.

Pod uticajem spoljnih sila tela se deformišu - menjaju svoj oblik i zapreminu. Elastične deformacije nazivaju se strain. Deformacija tela biće poznata ako poznamo pomeranje svake njegove tačke ili pak odredjenog broja

dobro izabranih karakterističnih tačaka na ispitivanom telu. Rezultujuća pomeranja proizvoljne tačke u napregnutom telu nastaju usled pomeranja tela tretiranog kao kruto telo (translacija i rotacija) i pomeranja usled čiste deformacije tela.

Deformacija tela opisuje se *prvo* pomoću affine transformacije koordinata pomerenih tačaka (reprezentativnih), *drugo* pomoću elemenata distorzije (promena ugla i dužine - dilatacija i klizanje) koji su nezavisni od koordinata i koordinatnog sistema i *treće* pomoću strain elipse koja je poznata i kao TISSOT-ova indikatrisa.

U poslednje vreme u Geodeziji koriste se iste matematičke metode kao u Teoriji elastičnosti, Mehanici kontinuuma, Mehanici čvrstog tela, Gradjevinskoj mehanici, Geotektonici i dr. Ali Welsch u svojim radovima dokazuje da je u Geodeziji već davno razvijen matematički aparat koji bi se mogao adaptirati za analizu stanja napona i deformacija u objektima (zgrade, brane i dr) i zemljinoj kori i to u okviru Teorije afinog preslikavanja, Računa izravnjanja i slično.

Pošto je koncepcija analize homogenih deformacija čisto geometrijska, sve informacije koje mogu da služe za definisanje konačnih deformacija, sadrže se u pomeranju tačaka kojima se reprezentuje ispitivano telo (napr. brana sa tačkama za oskultaciju koje su temena trougaonih i/ili četvorougaoonih konačnih elemenata).

Polazi se od pretpostavke da su pomeranja veoma mala prema dimenzijama tela, zato se koriste samo linearne relacije. Prema tome, ovde će se govoriti o tzv. infinitezimalnim deformacijama jer je za materijale i konstrukcije u gradjevinarstvu ova pretpostavka gotovo uvek ispunjena.

4.2.1. Homogene deformacije (STRAIN)

Strain analiza je veoma važna za interpretaciju deformacija i kao što smo rekli deformacije tela mogu biti opisane na tri načina: 1) pomoću *afine transformacije pomeranja* reprezentativnih tačaka; 2) pomoću *elemenata distorzije* tela (krivljenje tela - promena oblika tela) koji takodje predstavlja telo ali nezavisno od koordinata i DATUM-a, i 3) pomoću *strain elipse* koja je poznata kao Tisotova indikatrisa.

Afina transformacija koordinata. Teorija elastičnosti je u njenom uopštenom predstavljanju tako komplikovana da je teško primenljiva za praktičnu upotrebu. Iz tog razloga uvode se linearne relacije izmedju tačaka originalnog oblika (nedeformisanog) i deformisanog oblika tela. Homogene strain su uni-

formne za sve tačke tela i nezavisne su od veličine tela. Kod homogenih strain prave linije ostaju prave i međusobno paralelne posle deformacije, međutim njihov direkcionni ugao može da promeni vrednost.

Linearne relacije vektora koordinata x' tačaka deformisanog oblika tela sa vektorom koordinata x tačaka nedeformisanog (originalnog) oblika tela predstavljaju se transformacijom (WELSCH 1981).

$$x' = Fx + t \quad (4.2.1)$$

gde su (za dvodimenzionalni problem)

$$x'^T = [x' \ y']$$

vektori koordinata

$$x^T = [x \ y]$$

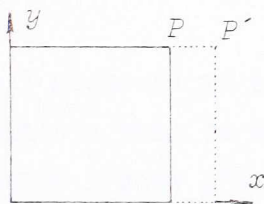
$$t^T = [t_x \ t_y]$$

vektor elemenata translacije

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{bmatrix}$$

matrica deformacije (rotacija, dilatacija i klizanje)

Sledeće figure mogu poslužiti kao ilustracija ([69]) pojedinih veličina

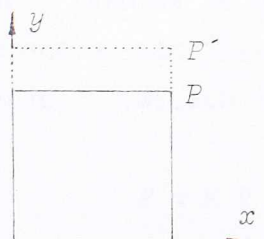


$$x' = (1 + df_{xx})x$$

$$y' = y$$

$$df_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x}$$

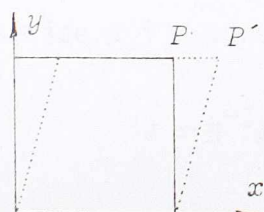
$$F = \begin{bmatrix} f_{xx} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$x' = x$$

$$y' = (1 + df_{yy})y$$

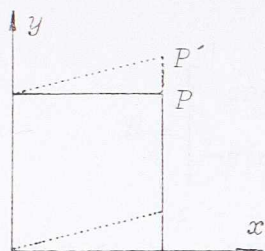
$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f_{yy} \end{bmatrix}$$



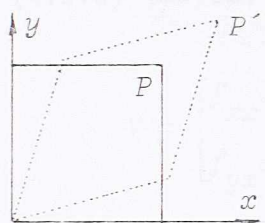
$$x' = x + tg \ y$$

$$y' = y$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & f_{xy} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + \operatorname{tg} \beta x \end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ f_{yx} & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} x' &= (1 + df_{xx})x + \operatorname{tg} \alpha y \\ y' &= \operatorname{tg} \beta x + (1 + df_{yy})y \end{aligned} \quad F = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Sl. 4.2.1 Komponente homogenih strain (deformacija)

Koordinatni sistem je takav (iz Mehanike kontinuuma) da direkcionni uglovi polaze od istočne ose u suprotnom smeru skazaljke na satu i zato treba posebno obratiti pažnju da ne dodje do nesporazuma sa geodetskom formulacijom direkcionnog ugla. Iz nekih razloga korisno je uvesti vektor pomeranja u koji se definiše kao (WELSCH 1981)

$$u = x' - x = (F - I)x = dF x \quad (4.2.2)$$

Na ovaj način matrica F se deli na

$$F = I + dF \quad (4.2.3)$$

čiji elementi su skalari i gradijenti (koji su izvodi funkcije položaja) koji pokazuju kako su transformisane koordinate starih tačaka u nove, pri čemu se tenzor F zove gradijent deformacije. Gradijent F nije simetričan ali je regularan tako da je $\det(F) > 0$ i zbog toga se F može predstaviti kao proizvod ortogonalne matrice rotacije R i simetrične matrice distorzije (dilatacija i smicanje) V (WELSCH 1981)

$$F = R V \quad (4.2.4)$$

Matrice R i V odredjene su pomoću F

$$V = R^{-1}F = R^T F. \quad (4.2.5)$$

Ako je ugao rotacije ω tada je

$$R = \begin{bmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}, \quad (4.2.6)$$

pa (4.2.5) ima oblik

$$V = \begin{bmatrix} f_{xx} \cos \omega - f_{yx} \sin \omega & f_{xy} \cos \omega - f_{yy} \sin \omega \\ f_{yx} \cos \omega + f_{xx} \sin \omega & f_{yy} \cos \omega + f_{xy} \sin \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} \\ V_{yx} & V_{yy} \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

Kako je matrica V simetrična to je

$$f_{yx} \cos \omega + f_{xx} \sin \omega = f_{xy} \cos \omega - f_{yy} \sin \omega \quad (4.2.8)$$

tako da je ω moguće jednostavno sračunati

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_{xy} - f_{yx}}{f_{xx} + f_{yy}}. \quad (4.2.9)$$

Iako tenzor distorzije V opisuje STRAIN komponente jednostavno uvode se dodatni tenzori deformacija

$$C = F^T F = V^T R^T R V = V^T V \quad (4.2.10)$$

jer je $R^T R = I$ zbog ortogonalnosti i GRINov tenzor

$$G = 1/2 (C - I) \quad (4.2.11)$$

Oba C i G su invarijantni u odnosu na kretanje krutog tela.

Dosad prikazane formule važe za homogene distorzije određene veličine (konačne STRAIN). Medjutim ako su distorzije i parametri koji se opisuju tako mali da se njihov proizvod i kvadrat mogu zanemariti bez bitnijeg uticaja na rezultat tada se za njih kaže da su infinitezimalne STRAIN. Koristeći ovo svojstvo mogu se učiniti neka uprošćenja, ako je $G \ll I$ (zanemarljivo kao veličina drugog reda) tada infinitezimalni tenzor V_i je određen sa

$$V_i = I + G_i = I + E. \quad (4.2.12)$$

E se obično zove tenzor deformacija i infinitezimalne STRAIN komponente su date sa

$$E = \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} \\ e_{yx} & e_{yy} \end{bmatrix} . \quad (4.2.13)$$

Koristeći (4.2.3), (4.2.11) i relaciju $V^T V = I + 2G$ E se može napisati u obliku

$$E = 1/2 (dF + dF^T) . \quad (4.2.14)$$

i ona je simetrična; $e_{xy} = e_{yx}$.

Ako je ugao rotacije mali $\omega = \omega_i$, matrica rotacije (4.2.6) postaje

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \omega_i \\ -\omega_i & 1 \end{bmatrix} = I + dR_i . \quad (4.2.15)$$

Koristeći (3.1.64) i razvijanjem u red (4.2.9) dobija se

$$R_i = I + 1/2 (dF - dF^T) . \quad (4.2.16)$$

i

$$\omega_i = 1/2 (f_{xy} - f_{yx}) . \quad (4.2.17)$$

Na ovaj način gradijent deformacije se razlaže u rotaciju krutog tela R i distorziju V ili E .

Specijalnim razlaganjem tenzor distorzije može biti transformisan u sistem glavnih osa STRAIN-a.

$$V = S \Lambda S^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.2.18)$$

gde su: Λ - spektralna matrica;

S - modalna (transformacije) matrica;

θ - orijentacija glavnih osa sistema;

Determinanta matrice Λ je odnos zapremine tela posle i pre nastanka deformacije, a u slučaju čiste distorzije (bez dilatacije) determinanta je jednaka jedinici. Ova determinanta (a takodje i trag iste matrice) nezavisna je od kretanja krutog tela i transformacije glavnih osa. Na ovaj način moguće je odrediti determinante matrica V i E (kao i matricu Λ).

Dilatacija odstupanja. Linearno istezanje neke linije definisano je sa

$$e = \frac{s' - s}{s} \quad (4.2.19)$$

gde su s' i s dužine linije pre i posle deformacije. Relacijom $e+1$ dobija se faktor razmere

$$m = \frac{s'}{s} = e + 1 \quad (4.2.20)$$

Dužina s izmedju dve tačke $P_1(x_1, y_1)$ i $P_2(x_2, y_2)$ može biti dobijena iz skalarnog proizvoda $\vec{dx}^T \vec{dx}$. Saglasno (4.2.1) i (4.2.10) za skalarni proizvod $\vec{dx}'^T \vec{dx}'$ posle deformisanja tela dobija se

$$\vec{dx}'^T \vec{dx}' = \vec{dx}^T F^T F \vec{dx} = \vec{dx}^T C \vec{dx} \quad (4.2.21)$$

ili u razvijenoj formi,

$$s'^2 = \vec{dx}'^T \vec{dx}' = d_x^2 C_{xx} + 2dx dy C_{xy} + dy^2 C_{yy} \quad (4.2.22)$$

$$\text{zamenom } dx = s \cos t, \quad dy = s \sin t, \quad (4.2.23)$$

u (4.2.22) gde je t direkcionu ugao linije pre deformacija, sledi

$$s'^2 = s^2 (C_{xx} \cos^2 t + 2C_{xy} \sin t \cos t + C_{yy} \sin^2 t) \quad (4.2.24)$$

i koristeći (4.2.11) dobija se stroga formula.

$$s'^2 = s^2 (1 + 2g_{xx} \cos^2 t + 4g_{xy} \sin t \cos t + 2g_{yy} \sin^2 t) \quad (4.2.25)$$

koja važi za konačne deformacije. Kada su u pitanju infinitezimalne deformacije komponente $g_{ik} \ll 1$ i (4.2.25) može biti dobijeno razvijanjem u red, pa koristeći (4.2.12) sledi

$$s' = s(1 + e_{xx} \cos^2 t + 2e_{xy} \sin t \cos t + e_{yy} \sin^2 t) \quad (4.2.26)$$

S obzirom na (4.2.19) relacija (4.2.26) postaje

$$e = e_{xx} \cos^2 t + e_{xy} \sin 2t + e_{yy} \sin^2 t \quad (4.2.27)$$

Smicanje - krivljenje ugla. Krivljenje ugla između dve linije dato je sa

$$g = \alpha' - \alpha$$

gde je α' - iskrivljeni (deformisani) ugao;

α - prvobitni (nedeformisani) ugao.

Krivljenje direktnog ugla je dato sa

$$dt = t' - t = \operatorname{arctg} \frac{dydy - dydx}{dx dx + dy dx}, \quad (4.2.28)$$

s obzirom na (3.1.51) sledi

$$dt = \operatorname{arctg} \frac{f_{yx} dx^2 - f_{xy} dy^2 + (f_{yy} - f_{xx}) dxdy}{d_x^T F dx} \quad (4.2.29)$$

S obzirom na (4.2.4) i (4.2.9) za dt' se dobija

$$dt' = \operatorname{arctg} \frac{V_{xy} (dx^2 - dy^2) + (V_{yy} - V_{xx}) dxdy}{d_x^T V dx} \quad (4.2.30)$$

Ovo je stroga formula koja važi za konačne deformacije. Za infinitezimalne deformacije. Za infinitezimalne deformacije koristeći (4.2.12), razvijajući u red i zanemarujući kvadratne članove dobijamo

$$dt' = e_{xy} (\cos^2 t - \sin^2 t) + (e_{yy} - e_{xx}) \sin t \cos t. \quad (4.2.31)$$

Saglasno (4.2.31) za krivljenje ugla dobija se

$$\begin{aligned} g = \alpha' - \alpha &= (t'_2 - t'_1) - (t_2 - t_1) = \\ &= e_{xy} (\cos^2 t_2 - \cos^2 t_1) + \frac{1}{2} (e_{yy} - e_{xx}) (\sin 2t_2 - \sin 2t_1) \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Veličina γ koja se računa sa

$$\gamma = \operatorname{tg} \psi, \quad (4.2.33)$$

$$\text{gde je } \psi = \alpha + \beta \quad (4.2.34)$$

zove se *mera smicanja*.

U slučaju infinitezimalnih deformacija koristeći (4.2.11) i (4.2.11) sledi

$$\gamma_i = \psi_i = 2e_{xy} \quad (4.2.35)$$

i zbog toga su parametri smicanja $e_{xy} = e_{yx}$ i nazivaju se inženjersko smicanje.

Analogno linearnom istezanju, dilatacija kao mera krivljenja površi oblasti definisana je sa

$$dA = \frac{A' - A}{A} \quad (4.2.36)$$

i posle odredjenih aproksimacija za infinitezimalne deformacije sledi da se

$$dA_i = e_1 + e_2 \quad (4.2.37)$$

dilatacija oblasti jednako zbiru glavnih deformacija. Ovaj Velšov postupak može se opisati kroz četiri faze:

- izravnanje mreža kao slobodnih odvojeno za pojedine serije;
- testiranje globalne podudarnosti mreže u dve serije;
- analiza konačnih elemenata;
- analiza pomeranja pojedinih tačaka.

4.2.2. Izravnanje mreže

Odvojeno izravnanje mreža kao slobodnih u pojedinim epohama (minimalna norma na identičnim tačkama), zatim odredjivanje vektora pomeranja $d = x_2 - x_1$, pripadajuće matrice koeficijenata težina $Q_d = Q_1 + Q_2$ i ocene s_1 i s_2 standardne greške jedinice težine. U ovoj fazi treba testirati opažanja radi kontrole i odbacivanja opažanja koja sadrže grube greške i definitivnog odredjivanja težina opažanjima.

4.2.3. Globalni test

Ispitivanje kongruencije odnosno sličnosti mreže u dve serije merenja. Drugim rečima ispituje se da li su u mreži, između dve serije merenja, nastala signifikantna pomeranja i deformacije. Zato se postavljaju multa i alternativna hipoteza

H_0 : mreža formirana sa tačkama koje su identične u obe epohe merenja podudara se u obe epohe;

H_a : mreža opisana u H_0 promenila je geometriju između dve epohe, nastale su signifikantne deformacije u mreži.

Za testiranje ovih hipoteza koristi se *globalni test*

$$T_1 = \frac{q_u}{h s} \quad (4.2.38)$$

gde su $q_u = u^T Q_u^{-1} u$

u $x_2 - x_1$, vektor koordinatnih razlika

$Q_u = Q_1 + Q_2$ njihova matrica koeficijenata težina

$\frac{q_u}{h}$ tzv. srednji rascep

h broj nezavisnih komponenti vektora u .

U q_u (4.2.39) se moraju pokazati pomeranja tačaka, ako postoje, što zavisi od test veličine i moći testa koji je korišćen. Ako važi nulta hipoteza H_0 , tada test veličina T_1 ima Fišerovu raspodelu

$$T_1 \sim F_{h,f} \quad (4.2.40)$$

pa ako je pri važenju nulte hipoteze H_0

$$T < F_{1-\alpha, f, h} \quad (4.2.41)$$

onda prihvatamo hipotezu o podudarnosti mreže u dve epohe sa verovatnoćom $1-\alpha$, znači usvaja se sa verovatnoćom $1-\alpha$ da nisu nastupile signifikantne deformacije. U suprotnom ako ne važi (4.2.41) odbacuje se nulta hipoteza H_0 i usvaja alternativna hipoteza H_a , a to znači da se prihvata sa verovatnoćom $1-\alpha$ da mreže nisu podudarne u dve epohe, t.j. nastupile su signifikantne deformacije u mreži između dve epohe merenja.

Moguće je koristiti jednu novu kvadratnu formu, kada nisu poznate promene koordinata u već funkcija dL (koja se računa iz koordinatnih promena u)

$$dL = L u \quad (4.2.42)$$

sa odgovarajućom matricom koeficijenata težina

$$Q_{dL} = L D_u L^T. \quad (4.2.43)$$

Ove funkcije dL , pre svega, su uglovi i dužine. Uglovi i dužine sa pripadajućom matricom Q_{dL} nezavisni su od DATUMA.

Ako su najmanje h nezavisnih elemenata (toliko je potrebno elemenata da se mreža jednoznačno odredi) sadržani u vektoru dL , tada za kvadratnu formu q_{dL} važi sledeće (WELSCH 1983)

$$\begin{aligned} q_{dL} &= dL^T Q_{dL} dL \\ &= u^T L^T (L Q_u L^T)^{-1} L_u \\ &= u^T Q_u u = q_u \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

U (RAO i MITRA [60]) pokazano je da je

$$L^T (L Q_u L^T)^{-1} L = Q_u^{-1} \quad (4.2.45)$$

(jedinstvena) g -inverzija Q_u . Zbog toga je i kvadratna forma (4.2.44) invarijantna u odnosu na izbor funkcija (4.2.42), (WELSCH 1983). Za kvadratnu formu (4.2.39) važi ([79]) da je invarijantna na izbor g -inverzije Q_u^{-1} , a posebno na izbor DATUMA.

Ako se u ovoj fazi (druga) ustanovi da mreža nije podudarna u dve serije, nastupile su signifikatne deformacije u mreži između dve serije merenja, tada se prelazi na sledeću (treću) fazu.

4.2.4. Analiza konačnih elemenata

Da bi se dublje proniklo u nastale deformacije mreža se deli na *konačne elemente* (trouglove) i zatim se ispituje svaki pojedinačni trougao na rascepe. Za ispitivanje trouglova koristi se tehnika "STRAIN" analize (WELSCH 1981). Ako se mreža posmatra kao kruto telo onda deformacija krutog tela (mreža) ima kao posledicu deformaciju (krivljenje) dužina, uglova, površina i zapremina. Moguće je ispitati svaki od pomenutih elemenata tela (mreže). Dilatacija dužine (linearna ekstenzija) definisana je (4.2.19).

$$e = \frac{s' - s}{s} = \frac{1}{s} L u = \bar{L} u \quad (4.2.46)$$

gde su s i s' dužine linije (strane) pre i posle deformacija t.j. iz prve i iz druge serije.

Kao mera rascepa u nekom trouglu koriste se komponente tenzora rascepa (dve dilatacije i smicanje)

$$e_x^T = [e_{xx} \quad e_{xy} \quad e_{yy}] \quad (4.2.47)$$

Ove komponente e_{xx} , e_{xy} , e_{yy} mogu se odrediti koristeći vezu izmedju komponenta deformacije trougla i pomeranja u pravcu dužine strane (4.2.27)

$$e = e_{xx} \cos^2 t_{ij} + e_{xy} \sin 2t_{ij} + e_{yy} \sin^2 t_{ij} \quad (4.2.48)$$

gde je t_{ij} direkcioni ugao strane izmedju tačaka P_i i P_j .

Ako se napišu tri "jednačine opažanja" (oblika 4.2.48) strana jednog trougla moguće je jednoznačno odrediti elemente vektora e_x (dve dilatacije i smicanje). Dalje je moguće pomoću izračunatih elemenata vektora e_x sračunati glavne dilatacije (deformacije glavnih pravaca) na sledeći način:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} (e_{xx} + e_{yy} + ee) \\ e_2 &= \frac{1}{2} (e_{xx} + e_{yy} - ee), \quad \text{sa} \\ (ee)^2 &= (e_{xx} - e_{yy})^2 + 4e_{xy}^2 \\ \operatorname{tg} 2\theta &= \frac{2e_{xy}}{e_{xx} - e_{yy}} \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

Ovo su elementi STRAIN elipse (polu ose e_1 , e_2 i direkcioni ugao ose e_1) i nezavisno od izabranog DATUMA opisuju rascepe jednog trougla. Mere deformacije mogu se definisati preciznije:

e_{xx} je mera promene dužine po jedinici dužine u pravcu x ose, pozitivna je za izduženje ;

e_{yy} je mera promene dužine po jedinici dužine u pravcu y ose, pozitivna za izduženje ;

e_{xy} je mera smicanja ($=e_{yx}$), pozitivna za pravo poprečno smicanje

a takodje i glavne mere deformacije:

e_1 je maksimalna glavna mera deformacije, mera najveće promene dužine po jedinici dužine

e_2 je minimalna glavna mera deformacije, mera najmanje promene dužine po jedinici dužine

θ je direkcionni ugao maksimalne glavne mere deformacije, (sa orijentacijom) suprotno kretanju skazaljke na satu od x ose.

Dimenzije svih mera su MIKROSTRAIN (μ STRAIN) ili μ STRAIN/GODINA.

Osim STRAIN elipsi za utvrđivanje rascepa trougla (trougao promenio oblik) mogu se koristiti testovi (4.2.50), (4.2.51) i (4.2.52).

Za testiranje hipoteza

H_0 : Trougao nije promenio oblik izmedju dve serije, za ostale tačke se ne zna ništa.

H_a : Oblik trougla se promenio izmedju dve serije.

koristi se test za ispitivanje pojedinačne strane

$$T_{21}^2 = d\bar{l}^{-2} = \left(\frac{dl}{\sigma dl} \right)^2 \quad (4.2.50)$$

i testovi za ispitivanje više strana (na pr. n_i)

$$T_{22}^2 = \sum_{i=1}^{n_i} dl_i^{-2} \quad (4.2.51)$$

$$T_{12}^2 = \frac{dl^T Q^{-1} dl}{n_i \sigma^2} \quad (4.2.52)$$

Pri rešavanju nulte hipoteze H_0 testovi slede Fiserovu raspodelu

$$T_{21}^2 \sim F_{1,f} \quad (4.2.53)$$

$$T_{22}^2 \sim F_{n_i,f} \quad (4.2.54)$$

$$T_{12}^2 \sim F_{n_i,f}$$

Ako je pri važenju nulte hipoteze

$$T_{22}^2 < F_{1-\alpha, n_i, f} \quad (4.2.55)$$

$$T_{12}^2 < F_{1-\alpha, n_i, f}$$

onda se prihvata nulta hipoteza H_0 sa verovatnoćom $1-\alpha$ što znači usvaja se da trougao nije promenio oblik. Naprotiv ako ne važi (4.2.55) usvaja se alternativna hipoteza H_α sa verovatnoćom $1-\alpha$ oblik trougla se promenio signifikatno izmedju dve serije merenja i elipse se smatraju signifikatnim.

4.2.5. Analiza pomeranja pojedinačnih tačaka

Analizom konačnih elemenata (trouglova) u trećoj fazi ustanovljava se koji su trouglovi promenili oblik ali se ne zna koje su se tačke promenile. U tom cilju, da se otkriju tačke koje su se signifikatno promenile, testira se tačka po tačka u odnosu na sve preostale $(n-1)$ tačke. Ovo testiranje se sprovodi tako što se ispituju promene svih $n-1$ dužina strana koje povezuju jednu tačku sa svim ostalim tačkama. Zato se postavljaju hipoteze.

H_0 : Mreža sačinjena od identičnih tačaka podudara se u obe serije;

H_α : Mreža opisana u H_0 , izostavljajući jednu tačku, podudara se u obe serije, ova tačka se može pomeriti u nekom pravcu.

Ocena signifikatnosti pomeranja izostavljene tačke može se sprovesti vizuelno pomoću elipse pomeranja.

Koristi se takodje i test sličan testu (4.2.51)

$$T_{2,3}^2 = \sum_{i=1}^{n-1} dl_i^{-2} \quad (4.2.56)$$

za testiranje alternativne hipoteze.

H_α : Pojedinačna tačka u odnosu na sve ostale pomerena je. Ako je pri važenju nulte hipoteze da tačka nije pomerena

$$T_{23}^2 > F_{1-\alpha, n-1, f} \quad (4.2.57)$$

tada se prihvata alternativna hipoteza H_α i ta tačka posmatra kao signifikatno pomerena sa verovatnoćom $1-\alpha$.

Test T_{23}^2 primenjuje se na sve tačke i ona tačka za koju statistički test pokazuje najveću vrednost smatra se kao najviše pomerena i izdvaja se iz skupa tačaka. Posle isključenja tačke koje se najviše pomerila treba ispitati da li su i dalje prisutne deformacije u mreži t.j. treba izvesti jedan novi globalni test (sa smanjenim stepenom slobode u imeniocu $h-2$).

Pa ako novi globalni test pokaže da su i dalje prisutne deformacije u mreži (posle isključenja tačke) treba ponavljati napred opisani postupak dok se ne ispituju promene svih tačaka mreže u odnosu na sve preostale tačke (svaka prema svim).

4.3. DELFT POSTUPAK

Ovaj postupak je zasnovan na B metodi (izumeo je Baarda 1968) testiranja. B metoda sadrži koncepte unutrašnje i spoljne pouzdanosti mreže (Baarda 1968^a i Shrzanowski i ostali 1981, Van Mierlo 1978 i 2.10.2) t.j. testiranje opažanja radi otkrivanja grubih i sistematskih grešaka i njihovog eliminisanja i testiranja uticaja neotkrivenih grubih i sistematskih grešaka na koordinate tačaka mreže. Osim toga B metodom se testiraju: stabilnost osnovnih tačaka mreže, pomeranje pojedinih tačaka mreže i modeli deformacija. Takodje i S-transformacija (Baarda 1968^a, Van Mierlo 1978, 1980 i (podpoglavlje (2.11)) igra važnu ulogu kod ovog postupka.

Test procedura kod deformacionih merenja, Delft postupak, izvodi se u četiri faze:

- testiranje opažanja pomoću DATA SNOOPING ;
- testiranje podudarnosti mreže (cele ili parcijalne) u dve epohe ;
- testiranje pomeranja pojedinačnih tačaka (osnovnih tačaka mreže i/ili tačaka na objektu) ;
- testiranje modela deformacija.

Preduslov za izvršenje prve faze je odvojeno izravnanje mreže kao slobodne za svaku pojedinačnu seriju.

4.3.1. Testiranje opažanja

Uprkos činjenici da se merenja sprovode sa velikom pažnjom čine se neizbežne greške. Neotkrivene greške u opažanjima mogu dovesti do pogrešnih zaključaka o mogućim deformacijama. Za otkrivanje grubih i sistematskih grešaka u opažanjima koristi se B metoda testiranja. Polazi se od nulte hipoteze H_0 .

H_0 : "U opažanjima ne postoje grube i sistematske greške". Za testiranje ove hipoteze koristi se činjenica da je

$$T = \frac{\hat{v}^T P v}{b \cdot \sigma^2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim F_{b, \infty, \alpha} \quad (4.3.1)$$

gde su:

b je broj stepeni slobode (u ovom slučaju se poklapa sa brojem suvišnih merenja)

$\hat{\sigma}^2$ ocena disperzije jedinice težine

σ^2 a priori disperzija jedinice težine, koja se za ovaj postupak uzima da je data.

Ako je

$$T > F_{b, \infty, \alpha} \quad (4.3.2)$$

tada se nulta hipoteza odbacuje, inače se prihvata. Ako je H_0 odbačeno (važi 4.3.2) moraju se potražiti moguće greške u opažanjima. Za uspešno ispitivanje mogućih grešaka u opažanjima testiraju se alternativne hipoteze za svako opažanje $z_i (i=1, 2, \dots, n)$, i za vektor opažanja z važi

$$H_a: M(z|H_a) = M(z|H_0) + \nabla z.$$

Ako važi nulta hipoteza H_0 popravke v imaju

$$M(v|H_0) = 0, \quad (4.3.4)$$

a ako važi alternativna hipoteza H_a (4.3.3) sledi

$$M(v|H_a) = \nabla v, \quad \text{"nabla" } v, \quad (4.3.5)$$

gde je

$$\nabla v = Q_v F_z \nabla z \quad (4.3.6)$$

i tada je

$$M\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \mid H_a\right) = 1 + \frac{\lambda}{b} \quad (4.3.7)$$

gde je λ parametar necentralnosti F -raspodele. Vektor ∇z i λ uglavnom su nepoznati.

Svako opažanje se testira sa

$$\omega_i = \frac{c^T P_L v}{\sigma_o \sqrt{q_i}} \geq \sqrt{F_{1, \infty, \alpha}} \quad (4.3.8)$$

gde je

$$q = c^T (P_L - P_L A N^{-1} A^T P_L) c$$

c - vektor koji opisuje alternativnu hipotezu H_a

α_o - nivo značajnosti ($\alpha_o = 0,001$)

Kako su u opštem slučaju opažanja nekorelisana (P_L je dijagonalna matrica) dobija se prostija formula (4.3.8)

$$\omega_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} \geq \sqrt{F_{1, \infty, \alpha_o}} \quad (4.3.9)$$

Ako je $|\omega_i| > \sqrt{F_{1, \infty, \alpha_o}}$ usvaja se da samo to jedno jedino opažanje sadrži grubu grešku i treba ga eliminisati u protivnom ako je $|\omega_i| < \sqrt{F_{1, \infty, \alpha_o}}$ usvaja se da je to opažanje ^{grube} bezgreške. Ovo testiranje treba sprovesti za svako opažanje i ispitati koja su opažanja opterećena greškama i zbog toga ih treba eliminisati.

Ovde se pojavljuju više-dimenzionalni (b -dimenzionalni) i jedno-dimenzionalni F -testovi respektivno (4.3.1) i (4.3.8) i zbog toga postoje karakteristične vrednosti $(\alpha_o, \beta_o, \lambda_o)$ za jednodimenzionalni F -test i karakteristične vrednosti (α, β, λ) za b -dimenzionalni F -test. Ove karakteristike su: α i α_o nivoi značajnosti, β i β_o moć testa, λ i λ_o parametri necentralnosti F -rasporeda. Nivo značajnosti α b -dimenzionalnog F -testa (4.3.1) povezan je sa karakteristikama, $\alpha_o, \beta_o, \lambda_o$, jedno-dimenzionalnog testa. Ako se izaberu zajednički novoi moći $\beta = \beta_o$ za oba testa, i koristi isti nivo $\lambda = \lambda_o$ za parametre necentralnosti tada će nivoi značajnosti α i α_o postati nezavisni što se piše simbolično

$$\lambda = \lambda(\alpha_o, \beta_o, 1,) = \lambda(\alpha, \beta_o, b,), \quad (4.3.10)$$

pa je u tom slučaju moguće sračunati nivo značajnosti α , pri čemu se obično uzima za $\alpha_o = 0,001$, $\beta_o = 0,80$ i u tom slučaju je $\lambda_o = 1,71$.

Dalje je moguće sračunati odgovarajuće granice za svako opažanje (unutrašnja pouzdanost) po formuli

$$\nabla L = \sqrt{\frac{\lambda_o \sigma^2}{q}} \quad (4.3.11)$$

i uticaj neotkrivenih grešaka na koordinate (spoljna pouzdanost) po formuli

$$\hat{\nabla x} = (N^{-1} A^T P_L) \nabla l \quad (4.3.12)$$

Iz iskustva je poznato da mreže za deformacionu analizu imaju slabu unutrašnju pouzdanost što dovodi do neotkrivanja grešaka ∇l sa apsolutnom vrednošću reda 10σ . Takve greške nam dovode u opasnost testiranje deformacija. Neotkrivene greške opažanja kvare ocene koordinata tačaka a one mogu lako dovesti do pogrešne interpretacije promene koordinata izmedju dva merenja. Da bi se umanjila ova opasnost testira se svako opažanje radi aktiviranja onih koja sadrže grube i sistematske greške. Posle testiranja opažanja i eliminisanja opažanja sa grubim greškama sledi faza ispitivanja podudarnosti mreže u dva epohe.

4.3.2. Ispitivanje globalne podudarnosti

Podudarnost mreže u dve epohe ispituje se testiranjem nulte hipoteze pomoću testa (4.3.1), pri čemu je

H_0 : "Mreža nije promenila ni oblik ni veličinu izmedju dve epohe".

H_a : "Mreža je promenila oblik i/ili veličinu izmedju dve epohe".

Prihvatanje hipoteze H_0 , $T < F_{b,\infty,\alpha}$, ukazuje da se mreža nije deformisala. Medjutim prihvatanje H_a ukazuje na to da se mreža izmedju dve epohe deformisala. Moguće je da se samo deo mreže deformisao. Zato treba locirati deo mreže koji se nije deformisao.

4.3.3. Ispitivanje pomeranja pojedinih tačaka

Deformacije na koje ukazuje globalni test treba da budu objašnjene kao pomeranje jedne ili više tačaka. Zato se i ispituje pomeranje pojedinih tačaka. Prvo se ispituje pomeranje osnovnih tačaka t.j. ispituje se stabilnost osnovnih tačaka. Za osnovne tačke treba da važe uslovi

$$M(\hat{x}^i - \hat{x}^{ii}) = 0 \quad \text{ i } \quad M(\hat{y}^i - \hat{y}^{ii}) = 0 \quad (4.3.13)$$

Primenom B metode koristeći (4.3.1) i (4.3.8) malo izmenjeno treba testirati hipoteze

H_0 : "Mreže iz dve epohe podudaraju se",

H_a : "Mreže iz dve epohe, izostavljajući jednu tačku podudaraju se".

Test veličina je

$$T = \frac{(\hat{\Omega} - \Omega)/r}{\hat{\sigma}^2} > F_{1, \infty, 1-\alpha} \quad (4.3.14)$$

gde je

$\hat{\Omega} = \hat{V}^T P \hat{V}$ iz funkcion modela bez ograničenja ($l + \hat{V} = A \hat{x}$)

$\hat{\Omega}_c = \hat{V}_c^T P \hat{V}_c$ iz modela $l + \hat{V}_c = A \hat{x}_c$ sa ograničenjem pri čemu $B \hat{x}_c = w$ da su priraštaji koordinata odbačene tačke jednaki nuli. Ako je ispunjen uslov (4.3.14) odbacuje se hipoteza H_0 sa verovatnoćom $1-\alpha$ i usvaja, hipoteza H_A da medju osnovnim tačkama ima bar jedna nestabilna tačka. Lociranje mogućih pomeranih tačaka sprovodi se sa jednodimenzionalnim testom sličnim (4.3.8)

$$\omega_i = \frac{c_i^T P \Delta x}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q}} \geq \sqrt{F_{1, \infty, 1-\alpha_0}} \quad (4.3.15)$$

ispituje se pomeranje jedne tačke u različitim pravcima, na pr. duž x ose, y ose, simetrale $+x$ osl i $+y$ osl - u kom slučaju je $c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$, simetrale $+x$ ose i $-y$ ose ($c = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ \dots \ 0]$) i dr. [63]. Ako se pokaže za ispitivani pravac da je $|\omega| < \sqrt{F_{1, \infty, 1-\alpha_0}}$ smatraće se da je tačka stabilna u pravcu vektora c . Maksimalna vrednost ω_j , ako je $|\omega| > \sqrt{F_{1, \infty, 1-\alpha_0}}$, označava mogući pravac (približni) pomeranja tačke i ta se osnovna tačka smatra nestabilnom. Ova procedura se ponavlja dok se ne eliminišu sve nestabilne osnovne tačke i ne nadju mogući pravci njihovog pomeranja. Ovde je bitno da koordinate osnovnih tačaka imaju minimalnu normu i da odgovarajuća matrica $Q_{\hat{x}}$ ima minimalan trag, što se postiže S -transformacijom (2.11.7). Kako postoji mogućnost da ostanu neotkrivene greške opažanja što vodi do pogrešnih zaključaka o mogućim pomeranjima, to treba izračunati prema (4.3.12) uticaj neotkrivenih grešaka ∇l_i na koordinate, meru spoljne pouzdanosti $\nabla \hat{x}$. Ispitivanje pomeranja tačaka na objektu i nestabilnih osnovnih tačaka istovetno je ispitivanju osnovnih tačaka samo što se izravnjanje dva skupa tačaka sprovodi pod uslovom (4.3.13) ali sada za sve tačke mreže (i osnovne i tačke na objektu).

Za osnovne tačke moguće je izračunati granice pomeranja pomoću elipse

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \nabla x_i \\ \nabla y_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{x_i x_i} & Q_{x_i y_i} \\ Q_{y_i x_i} & Q_{y_i y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla x_i \\ \nabla y_i \end{bmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Odstojanje izmedju centra elipse i tačke na elipsi (presek pravca i elipse) daje granicu za pomeranje osnovne tačke u odredjenom pravcu. Računanje ove

elipse je vrlo važno, zato što može biti uradjeno za vreme planiranja mreže t.j. pre merenja mogu se saznati pravci maksimalnih (slabi pravci) i pravci minimalnih grešaka za određenu tačku mreže.

4.3.4. Testiranje modela deformacija

Ovde dolazi do izražaja B metoda testiranja u analizi deformacija jer je dosta moćna. Model izravnjanja sadrži uslove (4.3.13) za sve tačke mreže. Modeli deformacija mogu biti definisani sa različitim vektorima c , zavisno od toga kakve de deformacije pretpostavljaju. Na pr. model deformacija u kome je $c^T = [1, 0, 1, 0, 1, 0 \dots 0000]$ opisuje pomeranje nekih tačaka u pravcu x ose za jednaku veličinu ∇ a za ostale tačke u pravcu x ose i za sve tačke u pravcu y ose uzeto je da nisu pomerene. Sve tačke za čije komponente u vektoru c odgovara broj 0 nisu se pomerile u tom pravcu a ako odgovara broj 1 pomerile su se u tom pravcu. Ovde su pomeranja nepoznate veličine. Može se otkriti pomeraње grupe tačaka u pravcu x ose (za jednaki iznos ∇) jednodimenzionalnim testiranjem modela deformacija koristeći formulu

$$c \nabla = c \sqrt{\frac{\lambda_o \sigma_o^2}{q}} \quad (4.3.17)$$

gde λ_o zavisi od α_o i β_o , videti jednačinu (4.3.10). Model deformacija $c \cdot \nabla$ može se testirati pomoću ω -testa (4.3.17) sa verovatnoćom β_o . Vektori c treba da budu određeni pre merenja i izravnjanja, treba unapred otkriti (informacijama drugih struka) koji tip pomeranja može biti verovatan ili očekivan. Definisane vektora c posle izravnjanja opterećeno je opasnošću od uticaja neotkrivenih grešaka merenja na koordinate i pomeranja tačaka i donošenje pogrešnih zaključaka o nastalim deformacijama. Rizično je uticaje neotkrivenih grešaka merenja interpretirati kao pomeranja tačaka.

4.4. FREDERIKTON POSTUPAK

Ovaj postupak analize deformacionih merenja prikazan u radovima (Chrzanowski, a i ostali 1981, 1982^a, 1982^b, 1983^a, 1983^b) može se grupisati u četiri glavne faze:

prva faza, izravnjanje mreže kao slobodne odvojeno za svaku epohu merenja i kontrolisanja i odbacivanje opažanja koja imaju grube greške.

druga faza, identifikacija mogućih modela deformacija, ispitujući razlike opažanja i dobijena pomeranja tačaka mreže.

treća faza, ocena parametara deformacije

četvrta faza, kontrolisanje modela deformacija i izbor najboljeg modela.

4.4.1. Izravnanje mreže

Odvojeno izravnanje mreže u pojedinim serijama kao slobodne mreže i ocena tačnosti. Da bi se sprečilo donošenje pogrešnih zaključaka o nastalim deformacijama, a to će biti slučaj ako se ne otkriju grube greške u opažanjima, treba kontrolisati i odbaciti merenja (ako je potrebno treba ponoviti odbačena merenja) koja sadrže grube greške. Ovu fazu treba iskoristiti za definitivno odredjivanje težina opažanja. Ovaj postupak dozvoljava korišćenje nepotpune mreže (postoji defekt konfiguracije) i korišćenje različitih ograničenja minimuma za tretiranje podataka defekta.

4.4.2. Identifikacija mogućih modela deformacija

Cela oblast koja se osmatra tretira se kao nekontinuirano deformabilno telo koje se sastoji od odvojenih kontinualnih deformabilnih blokova. Ovi blokovi se mogu relativno pomeriti i rotirati kao kruto telo a takodje svaki blok može promeniti oblik i dimenzije. Za svaki blok potrebno je izračunati (ispitati): dve komponente (a_0 i b_0 ili c_0 i g_0 itd) za pomeranje krutog tela; parametar rotacije $\omega(x,y)$ i tri STRAIN komponente $\epsilon_x(x,y)$, $\epsilon_y(x,y)$ komponente dilatacije (istezanja) i $\epsilon_{xy}(x,y)$ komponenta smicanja. U slučaju pomeranja pojedinačnih tačaka data tačka tretira se kao poseban blok i premešta se kao kruto telo u odnosu na nepomereni deo bloka.

Deformabilni blok je potpuno opisan ako je data funkcija pomeranja $d(x,y)$ za ceo blok. Ako su komponente, $dx(x,y)$ i $dy(x,y)$, funkcije pomeranja poznate tada se mogu izračunati komponente deformacije i rotacije u nekoj tački pomoću poznatih odnosa za infinitezimalne STRAIN i pomeranja

$$\epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} dx$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial}{\partial y} dy$$

(4.4.1)

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} dy + \frac{\partial}{\partial y} dx \right) \quad (4.4.2)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} dy - \frac{\partial}{\partial y} dx \right)$$

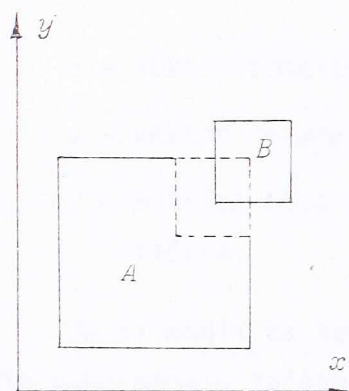
Funkcija pomeranja odredjena je aproksimacijom oblasti pomeranja polinomom

$$dx = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + \dots \quad (4.4.3)$$

$$dy = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + b_4 y^2 + \dots$$

U zavisnosti od toga koji je model izabran neki koeficijenti u (4.4.3) su nula. Tipični primeri modela deformacija su (Chrzanovski 1982^b).

a) Pomeranje pojedinačne tačke ili pomeranje krutog tela

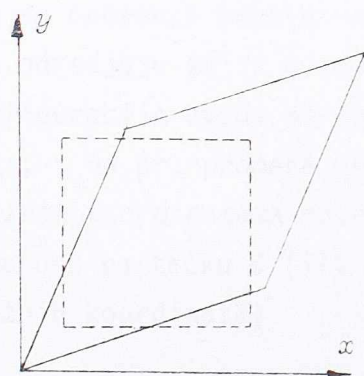


Sl. 4.4.1

Model deformacija, za blok B koji je pomeren u odnosu na stabilan blok A, je

$$\begin{aligned} dx_A &= 0 \\ dy_A &= 0 \\ dx_B &= a_0 \\ dy_B &= b_0 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

b) Homogena STRAIN (promena oblika tela-deformacija)



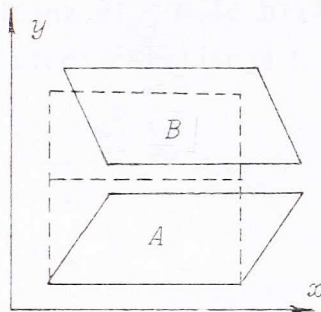
Sl. 4.4.2

$$\begin{aligned} dx &= a_1 x + a_2 y \\ dy &= b_1 x + b_2 y \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

zamenom (4.4.1) i (4.4.2) u (4.4.5) sledi

$$\begin{aligned} dx &= \epsilon_x x + \epsilon_{xy} y - \omega_y \\ dy &= \epsilon_{xy} x + \epsilon_y y + \omega_x \end{aligned}$$

c) Deformabilno telo sa diskontinuitetom



Sl. 4.4.3

Model deformacija, različita linearna deformacija blokova plus pomeranje krutog tela B u odnosu na A

$$\begin{aligned} dx_A &= a_1 x + a_2 y \\ dy_A &= b_1 x + b_2 y \\ dx_B &= c_0 + c_1 x + c_2 y \\ dy_B &= g_0 + g_1 x + g_2 y \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Uopšte model deformacija može biti opisan sa

$$d(x, y) = B e \quad (4.4.8)$$

gde su

d – vektor pomeranja;

e – vektor parametara deformacije (na pr. koeficijenti polinoma);

B – matrica koja sadrži elemente koji su funkcija položaja opažanih tačaka.

Da bi mogli da se izračunaju elementi vektora e treba da bude broj poznatih pomeranja u tačkama jednak ili veći od broja nepoznatih koeficijenata u modelu deformacija.

Moguća su dva slučaja (Chrzanowski 1982^b):

- 1) Ako su opažanja kompletna, nema defekta konfiguracije, koordinate i pomeranja odredjuju se iz odvojenog izravnjanja za svaku epohu. A ako postoji defekt konfiguracije uvode se lokalna ograničenja za odredjivanje koordinatnih razlika, i na pr. promena merene dužine dl_{ij} izmedju tačaka i, j sa poznatim približnim koordinatama može biti transformisana u relativna pomeranja dx_j, dy_j u odnosu na tačku i (ili obrnuto) fiksirajući tačku i i azimut α_{ij}^0 (iz približnih koordinata).

$$\begin{aligned} dx_j &= dl_{ij} \sin(\alpha_{ij}^0) \\ dy_j &= dl_{ij} \cos(\alpha_{ij}^0) \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Ova pomeranja se koriste kasnije u procesu podešavanja modela deformacija

kao kvazi-opažanja ("opažana" pomeranja).

2) Veličina dl_{ij} može biti izražena u funkciji pomeranja $dx(x,y)$ i $dy(x,y)$ koristeći razvijanje u Tajlorov red

$$dl_{ij} = \frac{x_j^0 - x_i^0}{l_{ij}} dx(x_j, y_j) - \frac{x_j^0 - x_i^0}{l_{ij}} dx(x_i, y_i) + \frac{y_j^0 - y_i^0}{l_{ij}} dy(x, y) + \frac{y_j^0 - y_i^0}{l_{ij}} dy(x, y) . \quad (4.4.10)$$

U (4.4.10) funkcije $dx(x,y)$, $dy(x,y)$ mogu biti zamenjene podesnim delovima polinoma (4.4.3) što zavisi od odredjenog modela deformacije.

Ili uopšte (|7|)

$$dl = ABe \quad (4.4.11)$$

gde je A - matrica jednačina opažanja (matrica plana).

Svejedno koji se slučaj primenjuje ali ako su izvršena kompletna opažanja (nema defekta konfiguracija) tada se preporučuje prvi slučaj (Chrzanowski 1982^b).

4.4.3. Ocena parametara deformacije

Ocena je zasnovana na nultoj hipotezi

$$H_0: M(x_0) = \xi = M(x_i - A_i B_i e) \quad (4.4.12)$$

i alternativnoj hipotezi

$$H_A: M(x_0) = \xi \neq M(x_i - A_i B_i e) , \quad (4.4.13)$$

gde su ξ - vektor nepoznatih ograničenja ;

x_i - vektor koordinata ili druge opažane veličine u epohi i .

Ako su sve opažane veličine transformisane u koordinatne razlike, tada vektori x_i sadrže samo koordinate tačaka (kvazi opažanja) i $A=I$ pa se zbog jednostavnosti u izvodjenju izostavlja matrica A . Nulta hipoteza (3.1.78) dovodi do uopštenog matematičkog modela

$$x_0 + v_0 = \xi \quad (4.4.14)$$

$$x_i + v_i = \xi + B_i e \quad (4.4.15)$$

gde je vektor v_i vektor popravaka za dotičnu epohu merenja. Da bi se jednačine (4.4.14) i (4.4.15) mogle rešiti po e treba vektor x da bude isti u svakoj epo-
hi i onda kada su broj i vrsta opažanja različiti od epohe do epohe. Zato se
umesto nedostajućih opažanja uvode veštačka opažanja, na pr. njihove ocene pri-
bližnih vrednosti, sa težinama jednakim nuli.

Primenom metode najmanjih kvadrata na model sa k epoha merenja sledi

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k P_i & \sum_{i=0}^k P_i B_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k P_i X_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4.16)$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k B_i^T P_i & \sum_{i=0}^k B_i^T P_i B_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^k B_i^T P_i X_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

gde je P_i - matrica težina opažanja (kvazi-opažanja) uglavnom singularna je sa
defektom ranga $d(\sum_{i=0}^k P_i) = d$.

Eliminisanjem ξ iz jednačina dobijaju se invarijantni deformacioni
parametri e za neku uopštenu inverziju, pod uslovom da je ispravno izabrana ma-
trica B_i .

$$\hat{e} = \left\{ \sum_{i=0}^k B_i^T P_i B_i - \sum_{i=0}^k B_i^T P_i \left(\sum_{i=0}^k P_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^k P_i B_i \right\}^{-1} \left\{ \sum_{i=0}^k B_i^T P_i X_i - \sum_{i=0}^k B_i^T P_i \left(\sum_{i=0}^k P_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^k P_i X_i \right\} =$$

$$= Q_e \cdot \omega \quad (4.4.17)$$

Za dve epohe dobija se prostiji model

$$d + v_d = B_e \quad (4.4.18)$$

gde je $d = x_i - x_0$

$$v_d = v_i - v_0$$

sa $K_d = \hat{\sigma}_0^2 (Q_{xi} + Q_{x0}) = \sigma_0^2 Q_d$

tada je $\hat{e} = (B^T Q_d^{-1} B)^{-1} B^T Q_d^{-1} d \quad (4.4.19)$

$$\hat{C}_e = \hat{\sigma}_o^2 (B^T Q_d^{-1} B)^{-1} = \hat{\sigma}_{oe}^2 \quad (4.4.20)$$

Ovo je specijalan slučaj uopštenog pristupa (4.4.17).

Ako je oblast pomeranja aproksimirana na pr. modelom (4.4.6) tada su jednačine opažanja za komponente pomeranja tačke P_j .

$$dx_j + V_{x_j} = \epsilon_{xx} x_j + \epsilon_{xy} y_j - \omega_{y_j} \quad (4.4.21)$$

$$dy_j + V_{y_j} = \epsilon_{xy} x_j + \epsilon_{yy} y_j + \omega_{x_j}$$

Kako je

$$\frac{dx_j}{dy_j} = \operatorname{tg}(\alpha_{ij}) \quad (4.4.22)$$

sledi

$$\frac{\epsilon_{xx} x_j + \epsilon_{xy} y_j - \omega_{y_j}}{\epsilon_{xy} x_j + \epsilon_{yy} y_j + \omega_{x_j}} = \operatorname{tg}(\alpha_{ij}) \quad (4.4.23)$$

pa je

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin(2\alpha_{ij}) + \epsilon_{xy} \cos(2\alpha_{ij}) \quad (4.4.24)$$

Ako se ω zanemari (ako nema spoljnih referentnih tačaka) tada će se menjati STRAIN parametri sa promenom minimalnih ograničenja.

Ako se Q_d računa koristeći rešenje unutrašnjih koordinata i Q_d^+ (pseudo inverzija od Q_d koristeći (4.4.19) izostavljanje ω je opravdano i kada ne postoji apsolutna orijentacija mreže.

4.4.4. Kontrolisanje modela deformacija i izbor "najboljeg" modela

Treba proveriti da li je $\hat{\sigma}_{oe}^2$ dobijeno izravanjem isto kao a priori $\hat{\sigma}_o^2$ dobijeno iz kombinacije nekog para epoha. Zato se postavljaju hipoteze:

$$H_o: \hat{\sigma}_{oe}^2 = \hat{\sigma}_o^2$$

$$H_A: \hat{\sigma}_{oe}^2 \neq \hat{\sigma}_o^2$$

Ako je test T^2 prekoračio graničnu vrednost $F(f_e, f, \alpha)$ t.j. ako je

$$T^2 = \frac{\hat{\sigma}_{oe}^2}{\hat{\sigma}_o^2} > F(f_e, f, \alpha)$$

tada se nulta hipoteza odbacuje, i u tom slučaju se model neusvaja i suprotno ako se nulta hipoteza prihvati tada je testirani (kontrolisani) model prihvatljiv. Kako ponašanje (delovanje) deformabilnog tela, obično, nije kompletno poznato, to postoji više od jednog modela koji mogu biti prihvaćeni globalnim testom. Zbog toga je potrebno od svih prihvaćenih modela naći "najbolji" i grafički prikazati odabrani model ili više modela koristeći proste pravouglove blokove za predstavljanje zona deformabilnog tela (Chrzanowski 1982^b).

4.5. KARLSRUE POSTUPAK

Ovaj postupak izvršava se u tri faze (Heck 1977, 1978, 1983 i Chrzanowski i ostali 1981, 1982^a):

Prva faza, svaka epoha (t.j. mreža merena u svakoj epohi) izravnavana se zasebno kao slobodna mreža radi kontrole i odbacivanja opažanja koja sadrže grube greške i definitivnog odredjivanja težina opažanjima.

Druga faza, testiranje unutrašnje stabilnosti parcijalne mreže koja sadrži osnovne (referentne) tačke.

Treća faza, zajedničko izravnanje svih epoha, pri tome se uzima da stabilne osnovne tačke obrazuju jedan vektor nepoznatih x , a tačke na objektu i nestabilne osnovne tačke za svaku epohu opažanja obrazuju po jedan vektor nepoznatih x_i (približne koordinate identične su u svim epohama). Grafičko prikazivanje vektora pomeranja tačaka na objektu (razlike koordinata tačaka izmedju svake dve epohe) i njima odgovarajućih konfidenc elipsi daje očiglednu geometrijsku predstavu o deformaciji celog objekta i omogućava da se nastala pomeranja položaja tačaka vrlo jednostavno lokalizuju.

4.5.1. Odredjivanje težina i kontrolisano odbacivanje opažanja sa grubim greškama

Za svaku epohu izvršeno je zasebno izravnanje mreže i dobijene su ocene postignute tačnosti opažanih pravaca (uglova) i dužina. Računanje težina za različite grupe opažanja u epohi i izmedju epoha izvršeno je po formulama.

$$P_{s_i} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{s_i}^2} ; \quad P_{p_i} = \frac{\sigma_o^2}{\hat{\sigma}_{p_i}^2} \quad (4.5.1)$$

σ_o - a priori standardna greška opažanja

$\hat{\sigma}_{s_i}, \hat{\sigma}_{p_i}$ - MNK ocene standardnih grešaka opažanih dužina i pravaca (uglova).

Iterativno odbacivanje onog opažanja koje ima maksimalnu test slučajnu promenljivu sprovedeno je po formuli

$$\theta = \max |\theta_i| = \max \left| \frac{\hat{v}_i}{\hat{\sigma}_o^{(1)} \sqrt{q_{v_i}}} \right| \quad (4.5.2)$$

gde je $\hat{\sigma}_o^{(1)}$ kvadratni koren ocene standardne greške jedinice težine sračunate bez opažanja 1. Ako je posle nekoliko koraka $\theta_m > t_{\bar{b}_i-1; \alpha_o/2}$, $\alpha_o = 0,001$ tada se odbacuju sva opažanja eliminisana u ovom i svim predhodnim koracima (\bar{b}_i je broj suvišnih merenja u ovom koraku).

4.5.2. Statističko testiranje unutrašnje stabilnosti dela mreže

Za ispitivanje stabilnosti stabilnih tačaka (predpostavljeno je da su stabilne u toku svih epoha) koje formiraju parcijalnu mrežu potrebno je naći test statistiku ($|25|$)

$$T = \frac{(\Omega_H - \Omega_o)/f_1}{\Omega_o/b} \quad (4.5.3)$$

gde je $\Omega_o = \sum_{i=1}^k \Omega_i$ suma kvadrata popravaka iz k pojedinačnih izravnjanja;

$b = \sum_{k=1}^n b_i$ b_i - broj stepeni slobode i -te serije;

$f_1 = (k-1)(2p-d)$;

k = broj epoha kod zajedn. izravnjanja;

p = broj osnovnih tačaka;

d - defekt ranga;

Ω_H - suma kvadrata popravaka iz istovremenog izravnjanja svih k epoha, koordinate p stabilnih tačaka ulaze samo jedan put nepoznate a koordinate nestabilnih tačaka k puta nepoznate.

Ako je

$$T < F(f_T, b, \alpha), \quad (4.4.4)$$

prihvata se nul-hipoteza sve stabilne tačke su stabilne t.j. ne mogu se otkriti pomeranja tačaka u parcijalnoj mreži, a ako nije ispunjen uslov (4.5.4) treba tražiti jednu ili više stabilnih tačaka koje su se pomerile (nestabilne su). Zato je potrebno sračunati novo Ω_H odbacujući jednu tačku iz skupa stabilnih tačaka. Ona tačka čijim se eliminisanjem dobija minimalno uzima se da je pomerena (nestabilna je) i tretira se kao nestabilna tačka u sledećim ispitivanjima. Ovo ispitivanje ponavlja se sve dok se ne zadovolji uslov (4.5.4) preostale stabilne tačke u parcijalnoj mreži uzimaju se u daljim ispitivanjima kao stabilne osnovne tačke za sve epohe. Treba naglasiti da su u Ω_H sadržana pomeranja tačaka ako postoje pa je zbog toga

$$M\left(\frac{\Omega_H}{f_H}\right) \neq M\left(\frac{\Omega_O}{f_O}\right) \quad (4.5.5)$$

odbacuje se nulta hipoteza H_O i usvaja alternativna H_a pa tada test veličina T sledi necentralnu F - raspodelu

$$T \sim F_{f_H, f_O, \lambda} \quad (4.5.6)$$

Naprotiv ako se usvoji H_O tada u Ω_H nisu sadržana pomeranja i onda test veličina T sledi centralnu F - raspodelu

$$T \sim F_{f_H, f_O}, \quad (4.5.7)$$

i važi

$$M\left(\frac{\Omega_H}{f_H}\right) = M\left(\frac{\Omega_O}{f_O}\right) \quad (4.5.8)$$

4.5.3. Statističko testiranje stabilnosti tačaka na objektu i nestabilnih tačaka

Pretpostavke za zajedničko izravnanje su stabilnost (nepromenljivost) osnovnih tačaka, istovetnost razmere i homogenost merenja u obema epohama. Zbog toga se pre zajedničkog izravnjanja, ispituje da li su ovi uslovi ispunjeni. Najpre se odvojenim izravnanjem premerene mreže (tretira se kao slobodna mreža) i analizom zaključuje da li je mreža ponovljenog merenja odstupila od mreže nultog merenja pomoću Helmertove transformacije preko osnovnih tačaka. Preostala neuklapanja posle transformacije daju obaveštenja o stabilnosti osnovnih tačaka. Statistička signifikatnost preostalog rascepa može se testirati pomoću relativnih elipsi. Razlika u razmeri izmedju obe mreže dobija se iz konstanti Helmertove transformacije. Pomoću F -testa ispituju se srednje greške jedinice težine iz oba pojedinačna izravnanja. Ako dobijemo da su merenja nehomogena treba izračunati težine. Nesmeju koordinate dobijene odvojenim izravnanjem slobodne mreže biti upotrebljive za analizu deformacija ako se prethodno ne izvrši Helmutova transformacija preko postojećih tačaka (ovim se dobija obaveštenje o stabilnosti osnovnih tačaka).

Kao osnova analize deformacija služe rezultati zajedničkog izravnjanja mreže (dvostruke koordinate tačaka na objektu, ocena srednje kvadratne greške jedinice težine, matrica koeficijenata težina i dr.). Zbog bolje preglednosti tretirane su samo dve epohe (nulto i ponovljeno merenje). Stabilne tačke obrazuju jedan vektor nepoznatih z , a tačke na objektu obrazuju dva vektora nepoznatih x_1 i x_2 (za obe epohe po jedan vektor). Iz izravnjanja mreže dobijaju se ocene \hat{z} , \hat{x}_1 , \hat{x}_2 , $\hat{\sigma}^2$ i matrica koeficijenata težina ($|25|$)

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{zz} & Q_{zx_1} & Q_{zx_2} \\ Q_{x_1z} & Q_{x_1x_1} & Q_{x_1x_2} \\ Q_{x_2z} & Q_{x_2x_1} & Q_{x_2x_2} \end{bmatrix} \quad (4.5.9)$$

Za linearnu hipotezu može se uzeti uslov

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (4.5.10)$$

Ovaj test treba da pokaže da li su razlike koordinata, tačaka na ob-

jektu, nastale izmedju dve epohe od slučajnih grešaka merenja ili od stvarnog pomeranja tačaka. Ako osnovne tačke nisu bile stabilne ovom testu prema Pelceru (1971) odgovara test veličina

$$T = \frac{d^T Q_d^{-1} d}{f \cdot \hat{\sigma}^2} \quad (4.5.11)$$

gde je $d = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$; $Q_d = Q_{x_1 x_1} + Q_{x_2 x_2} - Q_{x_1 x_2} - Q_{x_1 x_2}^T$

Da bi se tačke na objektu ispitale na signifikantna pomeranja ispituje se test veličina (4.5.11) sa $F_{f, n-u+d; \alpha}$. Ako je T signifikantno veće ($\alpha = 5\%$) odbacujemo hipotezu H_0 u protivnom usvajamo je.

Za lokalizaciju nastalih pomeranja tačaka za svaku tačku na objektu mora se ispitati nul-hipoteza da se tačka P_i nije pomerila, t.j. očekivane vrednosti koordinata tačaka $P_{1,i}(y_{1,i}, x_{1,i})$ nultog merenja ne razlikuju se od očekivanih vrednosti koordinata odgovarajućih tačaka $P_{2,i}(y_{2,i}, x_{2,i})$ ponovljenog merenja:

$$y_{1,i} - y_{2,i} = 0 \quad (4.5.12)$$

$$x_{1,i} - x_{2,i} = 0$$

Ocena vektora pomeranja je ($|25|$)

$$\hat{d}_i = \begin{bmatrix} y_{1,i} - y_{2,i} \\ x_{1,i} - x_{2,i} \end{bmatrix} = C^T X,$$

sa

$$C^T Q_{xx} C = Q_{\hat{d}_i} = \begin{bmatrix} \bar{q}_{yy_d} & \bar{q}_{yx_d} \\ \bar{q}_{xy_d} & \bar{q}_{xx_d} \end{bmatrix} \quad (4.5.13)$$

$$\bar{q}_{yy_d} = q_{y_i y_i}^{11} + q_{y_i y_i}^{22} - 2q_{y_i y_i}^{12}$$

$$\bar{q}_{xx_d} = q_{x_i x_i}^{11} + q_{x_i x_i}^{22} - 2q_{x_i x_i}^{12} \quad (4.5.14)$$

$$\bar{q}_{yx_d} = q_{y_i x_i}^{11} + q_{y_i x_i}^{22} - q_{y_i x_i}^{12} + q_{y_i x_i}^{21}$$

Vrednosti sa desne strane jednačina (4.5.14) su koeficijenti težina koji se odnose na tačku P_i , unutar submatrica $Q_{x_1x_1}$, $Q_{x_1x_2}$, $Q_{x_2x_2}$ matrice koeficijenata težina zajedničkog izravnjanja (4.5.9).

Testiranje pomerljivosti tačke izvodimo sa

$$T = \frac{\hat{d}_i^T Q_{\hat{d}_i}^{-1} \hat{d}_i}{2\sigma_{P_i}^2} \sim F_{2,f}, \quad (4.5.15)$$

pa ako je

$$T < F_{1-\alpha;2,f} \quad (4.5.16)$$

onda prihvatamo H_0 : tačka nije pomerena. U protivnom H_0 odbacujemo.

Moguće je dati geometrijsku interpretaciju ovog testiranja (4.5.16) pomoću relativnih elipsi grešaka tako što se zajedno nacrtaju vektori pomeranja i relativne elipse grešaka. U tački mreže, na pr. P_i , u drugoj (tekućoj) seriji nacrtava se relativna elipsa poverenja a zatim povuče vektor pomeranja od iste tačke u nultoj seriji do centra elipse (tačka u tekućoj seriji). Ako se tačka iz nulte serije nalazi u elipsi tada se prihvata nulta hipoteza sa verovatnoćom $100(1-\alpha)\%$ i ta se tačka za dalju analizu smatra stabilnom. Na protiv, ako tačka iz nulte serije pada van relativne elipse poverenja tada se odbacuje nulta hipoteza i usvaja alternativna - ta se tačka za dalju analizu usvaja kao nestabilna sa verovatnoćom $100(1-\alpha)\%$. U oba slučaja, kod prihvatanja nulte serije i kod odbacivanja nulte i prihvatanja alternativne postoji rizik, čine se greške I i II vrste (detaljnije u (2.12)).

Poluosovine srednjih (jediničnih relativnih elipsi) množe se sa $\sqrt{2 F_{2,n-u+d,\alpha}}$ da bi se dobilo područje pouzdanosti - relativne elipse pouzdanosti.

5. UPOREDNI PREGLED I ZAKLJUČCI O POSTOJEĆIM POSTUPCIMA

Nije jednostavno upoređivati različite prilaze u analizi deformacionih merenja, odn. otkrivanju stabilnih tačaka sistema. Poznati postupci imaju razlike u prilazu rešavanja problema. Pored ostalog, uvedeni su različiti matematički modeli i nivoi značajnosti. Zbog toga se pojavljuju i razlike u rezultatima kod pojedinih metoda za isti slučaj mreže tačaka za ispitivanje deformacija. Problem je još i u tome što se za iste pojmove može imati različito shvaćanje. Na primer, pojam pomeranja neke tačke ima kod pojedinih autora i različito značenje. U nekim slučajevima pomeranje neke tačke tretira se kao relativno pomeranje u odnosu na sve ostale tačke mreže (Hanover-postupak, Delft-postupak, Minhen-postupak), a nekad u odnosu samo na osnovne tačke mreže (Hanoverski-postupak apsolutnih deformacija, Karlsruhe-postupak, Frederikton postupak). Neki tretiraju više epoha merenja zajedno (Hanover postupak, Karlsruhe postupak), a neki po dve epohe merenja zajedno (Delft, Minhen i Frederikton postupci). To su osnovni problemi koji stvaraju poteškoće kod upoređivanja poznatih postupaka analize deformacionih merenja, odnosno otkrivanja stabilnih tačaka sistema.

Dalje će ukratkom biti dat pregled u prilazima problemu iz kojih se vide razlike.

Pelcerov prilaz:

- Ispitivanje globalne podudarnosti;
- Lokalizacija značajno pomerenih tačaka ispitivanjem pomeranja pojedinih tačaka (selektivno odbacivanje tačaka).

Velšov prilaz:

- Ispitivanje globalne podudarnosti;
- Lokalizacija značajno deformisanih figura (trouglova-konačni element) testiranjem stranica trougla i računanjem elemenata elipse deformacija (rascepa) trougla;
- Lokalizacija značajno pomerenih tačaka ispitivanjem pomeranja pojedinih tačaka u odnosu na sve ostale tačke (selektivno odbacivanje tačaka).

Delft prilaz:

- Ispitivanje globalne podudarnosti;
- Lokalizacija značajno pomerenih tačaka testiranjem mogućeg pomeranja

pojedinačnih tačaka i testiranje mogućeg modela deformacija uz dodatne informacije o mogućem pravcu pomeranja pojedinih tačaka ili grupe tačaka.

Frederikton prilaz:

- Identifikacija mogućih modela deformacija ispitivanjem podudarnosti blokova tačaka (kruto telo) t.j. testiranjem parametara deformacije (relativno pomeranje, rotacije, dilatacija i smicanje krutog tela);
- Izbor "najboljeg" modela deformacija.

Karlsruhe prilaz:

- Ispitivanje globalne podudarnosti osnovnih tačaka mreže;
- Odredjivanje značajno pomerenih tačaka ispitivanjem pomeranja pojedinačnih tačaka (selektivno odbacivanje tačaka).

Medjutim, svi pomenuti postupci imaju zajedničko to, što u prvoj fazi izvršenja tretiraju mreže kao slobodne mreže tačaka za svaku epohu merenja radi kontrolisanog otkrivanja grubih grešaka i njihovog eliminisanja iz modela i odredjivanja definitivnih težina. Svi postupci dopuštaju različite planove opažanja u mreži i konfiguraciju mreže. U najnovije vreme, radi usaglašavanja raznih postupaka, svi postupci (izuzev Delft postupka) pri testiranju koriste test veličine T_1 a Delft postupak koristi test veličinu T_2 (16 - Radna grupa FIG-e, Budimpešta 1982). Nove test veličine T_1 i T_2 imaju odgovarajuće izraze:

$$T_1 = \frac{(\Omega_c - \Omega)/r_c}{\Omega/b} = \frac{\Omega_c - \Omega}{r_c \hat{\sigma}^2} \sim F_{r_c, b}$$

i

$$T_2 = \frac{(\Omega_c - \Omega)/r_c}{\sigma^2} \sim F_{r_c, \infty}$$

U test veličini T_2 uzima se da je σ^2 poznato (delft postupak), a u testu T_2 ocena disperzije $\hat{\sigma}^2$ (koriste ga ostali postupci). Pomoću test veličina T_1 i T_2 testirani su kod svih postupaka modeli na grube greške ($T_1 \geq F_{r_c, b, 1-\alpha}$ i $T_2 \geq F_{r_c, \infty, 1-\alpha}$). Testovi T_1 i T_2 smatraju se najmoćnijim nepomeranim testovima u odnosu na sve alternativne hipoteze i time su ovi postupci približeni jedan drugom usvajanjem zajedničkih test veličina.

Treba naglasiti da svi postupci sadrže dve osnovne faze: globalni test podudarnosti i lokalizaciju stabilnih tačaka. Usvajanjem test veličina T_1 i T_2 svi postupci imaju isti globalni test, a razlike nastaju u načinu korišćenja testova u lokalizaciji.

6. NOV POSTUPAK ANALIZE GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA

6.1. SUSTINA POSTUPKA

Autor ovog rada je niz godina obradjivao i analizirao pomeranja i deformacije više desetina objekata i tla. Dugogodišnjim radom i izučavanjem ove problematike došlo se do odredjenih saznanja koja će biti prezentirana u ovom radu. Materija razmatrana u glavi 1 i 2 smatra se sastavnim delom novog postupka analize geodetskih deformacionih merenja.

Nov postupak analize geodetskih deformacionih merenja izgradjen je na inženjerskim principima:

- projektni zadatak sa zadatim uslovima za izradu projekta;
- projekat odredjivanja pomeranja i deformacije objekta i tla izradjen prema projektnom zadatku;
- realizacija projektnog rešenja u svemu prema projektu.

Ovakav prilaz problemu omogućava da se prikupe što potpunije informacije i obezbede neophodni uslovi za pouzdano odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla sa unapred zahtevanim uslovima i tačnošću (prema projektnom zadatku).

Jedna druga posebnost ovog postupka sastoji se u tome što se za ispitivanje podudarnosti mreže odnosno za ispitivanje stabilnosti osnovnih tačaka predlaže nov postupak koji ispituje podudarnost mreže između dve epohe u svim kombinacijama.

Ovaj postupak sigurno otkriva sve podskupove podudarnih tačaka. A korišćenjem prikupljenih informacija koje se dobijaju svojstveno novom postupku analize geodetskih deformacionih merenja nov postupak ispitivanja podudarnosti (utvrđivanje stabilnih tačaka) postaje posebno efikasan.

6.2. POSTUPAK ISPITIVANJA PODUDARNOSTI MREŽE U SVIM KOMBINACIJAMA

Globalni zadatak analize geodetskih deformacionih merenja sastoji se u tome da se pronadju osnovne tačke koje su podudarne u obe ispitivane serije.

U svim poznatim postupcima vrši se selektivno eliminisanje nestabilnih osnovnih tačaka, iz skupa od n tačaka, sve dok se ne pronadje skup stabilnih osnovnih tačaka. Prvo se primenjuje globalni test podudarnosti na skup od n tačaka i odbaci tačka koja pokaže najveće odstupanje. Zatim se isti postupak sukcesivno primenjuje na $n-1$, $n-2$, ... itd. tačaka, sve dotle dok se ne pronadje skup od k stabilnih osnovnih tačaka (dalje će se nazivati stabilne tačke) - u kom slučaju globalni test pokazuje saglasnost podudarnosti. Međutim ovakav način ispitivanja stabilnosti osnovnih tačaka, odnosno eliminisanja nestabilnih tačaka, ima jedan veliki nedostatak koji se ogleda u maloj moći otkrivanja nestabilnih tačaka. Mala moć testova u ovom slučaju javlja se iz razloga što se pojavljuje *relativno veliki broj nestabilnih tačaka*, koji dosta često može biti veći od broja stabilnih tačaka, t.j. što se pojavljuju dve grupe tačaka i to grupa tačaka koje sadrže pomeranja i grupa tačaka bez pomeranja.

U ovakvim slučajevima potrebno je primenjivati druge postupke koji sa većom sigurnošću razdvajaju skup tačaka koje su se pomerile od skupa tačaka koji se nisu pomerile. Takvi postupci koji omogućuju sigurnije razdvajanje ovih dveju grupa tačaka u matematičkoj statistici poznati su kao *robustni postupci*.

Jedan od takvih postupaka jeste *postupak ispitivanja podudarnosti figura (mreže) u svim kombinacijama*.

Princip metode ispitivanja podudarnosti figura u svim kombinacijama sastoji se u sledećem:

A. *Osnovna varijanta*. Ispituje se podudarnost mreže prve i nulte epohe. Ovo ispitivanje izvodi se u svim kombinacijama za delove mreže koji se sastoje od 2, 3, ..., p tačaka, gde je p ukupan broj tačaka u mreži. Testiranje podudarnosti mreže može se izvoditi pomoću razlika koordinata i/ili pomoću razlika dužina i uglova. Ako se za testiranje koriste razlike koordinata, tada je potrebno ocene \bar{x}_1 koordinata prve epohe transformisati na ocene \bar{x}_0 koordinata nulte epohe, u kom slučaju razlike koordinata postaju ocenljive funkcije. Međutim, kada se koriste razlike uglova i dužina onda ovu transformaciju nije potrebno izvoditi, pošto su, u tom slučaju, ovo ocenljive funkcije.

Zatim se za sve kombinacije sačini tabela razlika koordinata i/ili tabela razlika dužina i uglova iz dve epohe za tačke za koje se ispituje podudarnost. Koje veličine će biti prikazane tabelarno zavisi od toga, pomoću kojih se veličina (koordinatnih razlika i/ili razlika dužina i uglova) formiraju test veličine za ispitivanja podudarnosti. Dalje se formiraju test veličine, pomoću koordinatnih razlika i/ili razlika dužina i uglova, za testiranje hipoteze o podudarnosti mreže u dve tačke u svim kombinacijama (koliko kombinacija toliko će biti brojnih vrednosti za test veličine) i u tablici se označe one kombinacije tačaka za koje je prihvaćena hipoteza o podudarnosti mreže. Zatim se na isti način formiraju test veličine za ispitivanje podudarnosti mreže u tri tačke u svim kombinacijama (brojnih vrednosti test veličina ima koliko i kombinacija po tri tačke) i u tabeli označe kombinacije tačaka za koje je prihvaćena hipoteza o podudarnosti mreže. Ovo testiranje se sprovodi, dalje, za sve kombinacije po četiri tačke, za sve kombinacije po pet tačaka, ..., itd., i na kraju za p tačaka.

Posle ispitivanja podudarnosti u svim kombinacijama treba izvršiti pretragu po tabeli i uočiti sve označene kombinacije po dve tačke u kojima je mreža podudarna, zatim uočiti sve kombinacije po tri tačke u kojima ima obeleženih tačaka, ..., itd., do kombinacije sa p tačaka. Tačke koje su označene u najvećem broju kombinacija smatraće se stabilnim sa odgovarajućim nivoom značajnosti. Neka je broj tih tačaka k , tada moraju u tabeli biti označene te tačke u kombinaciji k tačaka i u svim kombinacijama nižeg reda od k tačaka. Drugim rečima, moraju biti označene sve kombinacije po dve tačke (iz skupa od k tačaka), sve kombinacije po tri tačke, ..., sve kombinacije po $k-1$ tačaka (iz skupa od k tačaka) i, naravno kombinacija tih k tačaka. Samo u takvom slučaju tih k tačaka se za dlju analizu smatraju kao stabilne tačke sa odgovarajućim nivoom značajnosti.

Ako u mreži postoji m grupa tačaka, sa po k_1, k_2, \dots, k_m tačaka u grupi, koje su podudarne svaka za sebe, onda ova metoda omogućava otkrivanje svih m grupa podudarnih tačaka. Potrebno je ovde naglasiti da će test podudarnosti za tačke iz jedne grupe pokazati saglasnost, medjutim za tačke iz različitih grupa test podudarnosti pokazaće nesaglasnost. Otkrivanje ovih grupa postaje veoma jednostavno i očigledno ako se koristi prethodno formirana tabela. Ovakve grupe tačaka javljaju se u slučajevima nastanka tzv. rascepa mreže.

Po utvrdjivanju skupa od k stabilnih tačaka pristupa se ocenjivanju pomeranja ostalih $p-k$ tačaka. Radi toga pogodno je još u fazi ispitivanja podudarnosti mreža u dve epohe uraditi i transformaciju slučnosti cele mreže iz prve na nultu epohu u svakoj kombinaciji na osnovi tačaka čija se podudarnost

ispituje. Odgovarajuće ocene razlika koordinata i/ili razlika dužina i uglova, takodje, se prikazuju u tabeli formiranoj pri ispitivanju podudarnosti mreže.

Ukupan broj kombinacija ispitivanja podudarnosti mreže: (sa dve tačke) plus (sa tri tačke) plus ..., plus (sa p tačaka) iznosi

$$b = \left| \binom{p}{0} + \binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \binom{p}{3} + \dots + \binom{p}{p} \right| - \left| \binom{p}{0} + \binom{p}{1} \right|$$

$$= 2^p - (p + 1) . \quad (6.2.1)$$

U tabeli (6.2.1) prikazan je ukupan broj kombinacija (ispitivanja podudarnosti mreže) za neke vrednosti p

Tabela 6.2.1

broj tačaka p	broj kombinacija b
3	4
4	11
5	26
6	57
7	120
8	247
9	502
10	1013
11	2036
15	32752
20	1048555

Iz tabele 6.2.1 zaključuje se da je broj kombinacija za $p \geq 10$ veoma veliki (veći od 1000), što iziskuje veliko vreme rada računara čime postupak počinje bivati neekonomičan. Ovo upućuje na to da treba projektovati mreže sa malim brojem ispitivanih, "stabilnih", tačaka ili uraditi modifikaciju ovog postupka. Retko se projektuje u mreži veći broj od 6-7 stabilnih tačaka, a vrlo

retko veći broj od 10. Ovo iz razloga što stoje na raspolaganju, još u fazi projektovanja mreže, dodatne informacije o stabilnosti tačaka (lokacijama za tačke), koje daje geolog. Zbog toga je moguće planirati manji broj stabilnih tačaka, jer postoji velika sigurnost da će odredjen broj tih tačaka ostati stabilan za vreme ispitivanja objekta.

Jedna od modifikacija koja se primenjuje u ovom radu, radi smanjivanja vroja kombinacija, sastoji se u tome da se ne vrši detaljno ispitivanje podudarnosti, kao u tački A., u svim kombinacijama, već skokovito u manjem broju kombinacija.

B. *Modifikovana osnovna varijanta.* Ispituje se podudarnost mreže prve i nulte epohe.

1. Ovo ispitivanje izvodi se u svim kombinacijama samo za po dve i za po tri tačke. Sačini se tabela koordinatnih razlika i/ili razlika dužina i uglova iz dve epohe za tačke za koje se ispituje podudarnost. Zatim se formiraju test veličine, pomoću razlike koordinata i/ili razlike dužine u uglova, za testiranje hipoteze o podudarnosti mreže u svim kombinacijama (sa po dve i sa po tri tačke). Dalje je potrebno u tabeli označiti one kombinacije po dve i one kombinacije po tri tačke za koje postoji saglasnost podudarnosti mreže. One tačke koje su označene i u kombinacijama po dve tačke i u kombinacijama po tri tačke formiraju osnovni skup od k tačaka.

Na ovaj način se izostavlja odredjen broj kombinacija ispitivanja podudarnosti.

2. Na ovako izdvojeni skup od k tačaka primenjuje se test podudarnosti sa istom test veličinom. Kada ovaj test pokaže saglasnost tada se ispituje podudarnost i preostalih $p-k$ tačaka. Formira se novih $p-k$ skupova tačaka od po $k+1$ tačke i to tako što se izdvojenom skupu od k tačaka priključuju pojedinačno ostale tačke iz skupa od $p-k$ tačaka. Na ovih $p-k$ skupova tačaka, sa po $k+1$ tačkom, primenjuju se test podudarnosti sa istom test veličinom. Skup tačaka sa signifikatnim testom ukazuje na to da je pridodata tačka značajno odstupila i ona se odbacuje kao nestabilna, a skup tačaka sa prihvaćenim testom ukazuju na to da pridodata tačka nije signifikatno pomerenjena i ona se priključuje skupu od k stabilnih tačaka. Neka je q broj ovako priključenih tačaka.

3. Dalje se formira skup od $k+q$ stabilnih tačaka i na njega primeni test podudarnosti sa istom test veličinom. Ovaj test bi morao da pokaže saglasnost (do granice značajnosti α). Pomoću skupa od $k+q$ tačaka formiraju se novi skupovi od po $k+q+1$ tačke (u svim kombinacijama) tako što se skupu od $k+q$ tačaka pridodaju pojedinačno tačke iz preostalog dela (skup $p-(k+q)$). Na ove skupove ponovo se primenjuje test podudarnosti čime se želi proveriti da li

možda medju preostalim tačkama (skup $p-k-q$) ima eventualno stabilnih tačaka.

4. U slučaju da test podudarnosti na izabrani skup od k tačaka ukazuje na značajno odstupanje od tablične vrednosti potrebno je u tom skupu potražiti one tačke koje sadrže pomeranja, jer po pretpostavci zbog njih je test i pokazao značajno odstupanje. Ovo se radi tako što se iz ovog skupa od k tačaka formiraju novi skupovi od po $k-1$ tačke (u svim kombinacijama) i na njih primeni test podudarnosti sa istom test veličinom. Saglasnost testa podudarnosti u ovom slučaju ukazuje na to da izostavljena tačka sadrži značajno pomeranje i ona se za dalju analizu smatra nestabilnom. Neka ovako odbačenih tačaka ima s , pri čemu treba napomenuti da će ovaj broj s odbačenih tačaka biti vrlo mali.

Formira se novi skup od $k-s$ tačaka i na njega primeni postupak opisan u tačkama 2. i 3., s tim što se sada osnovni skup sastoji od $k-s$ stabilnih tačaka. U ove četiri tačke iznesena je ideja i suština modifikovane metode.

6.3. TESTIRANJE REZULTATA MERENJA

Jedna od važnih faza u analizi geodetskih deformacionih merenja jeste faza testiranja rezultata merenja.

Od testiranja, za ovu analizu, važna su testiranja normalnosti, testiranja homogenosti tačnosti, testiranja korelisanosti i testiranja grubih grešaka rezultata merenja. Vrste merenih veličina koje se najčešće pojavljuju u ovim slučajevima su uglovne i linearne veličine pa će se u daljem samo o takvim vrstama veličina govoriti.

6.3.1. Testiranje normalnosti

Testiranje normalnosti rasporeda rezultata merenja je neophodno iz razloga što su skoro svi testovi zasnovani na normalnosti rasporeda osnovnog skupa opažanja.

Testiranje normalnosti rasporeda uglovnih veličina može se izvesti:

- pomoću raspona dvostruke kolimacije;
- pomoću srednje kvadratne greške dvostruke kolimacije;
- pomoću srednje kvadratne greške uglova sračunate iz odstupanja od aritmetičke sredine po girusima
- pomoću grešaka zatvaranja trouglova.

1) Testiranje normalnosti rasporeda iz grešaka zatvaranja trouglova spada u direktna testiranja i izvodi se pomoću Pissonovog χ^2 -testa. Formira se test veličina

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - \hat{n}p_j)^2}{\hat{n}p_j} \sim \chi_f^2, \quad f=k-c-1 \quad (6.3.1)$$

gde je: n_j - broj rezultata merenja u grupi j ;
 $\hat{n}p_j$ - sračunati (teorijski) broj rezultata merenja u grupi j ;
 c - broj nepoznatih parametara normalnog rasporeda (pošto je poznata istinita vrednost zbira uglova u trouglu onda nepoznati parametar može biti samo σ^2 - u kom slučaju je $c=1$; a ako je poznato i σ^2 onda je $c=0$);

$$k \leq 5 \log n \quad - \text{ optimalan broj grupa,} \quad (6.3.2)$$

n - ukupan broj grešaka zatvaranja trouglova.

Test veličina χ^2 iz (6.3.1) ima χ^2 -raspored sa $f = k-c-1$ stepeni slobode.

Hipotezu: greške zatvaranja trouglova pripadaju normalnom rasporedu prihvatamo ako je χ^2 manje od tablične vrednosti za odgovarajući nivo značajnosti. Verovatnoću \hat{p}_j računamo po formuli

$$\hat{p}_j = F(\Delta_j'') - F(\Delta_j') = F(u_j'') - F(u_j'), \quad (6.3.3)$$

gde su Δ_j' i Δ_j'' - granice j -tog intervala (grupa), a u_j' i u_j'' - njihove odgovarajuće normirane vrednosti

$$u_j' = \frac{\Delta_j'}{\hat{\sigma}}, \quad u_j'' = \frac{\Delta_j''}{\hat{\sigma}}, \quad (6.3.4)$$

pri čemu $\hat{\sigma}$ predstavlja ocenu standardne greške zatvaranja trougla koja se računa po formuli

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \quad (6.3.5)$$

Ako je poznato σ , onda se u (6.3.3) i (6.3.4) umesto ocena koriste prave vrednosti.

Napomena: Pri ovom testiranju mora biti $\hat{n}p_j \geq 5$ i $n_j \geq 5$, $j=1,2,\dots,k$.

Testiranje rasporeda normalnosti rezultata merenja uglova pomoću srednje kvadratne greške spada u indirektna testiranja.

2. Testiranje rezultata merenja na normalnost rasporeda koristeći raspon merenja izvodi se, takdoje, pomoću Pirsonovog χ^2 -testa - formula (6.3.1), s tim što u ovom slučaju raspored koji se testira jeste raspored raspona rezultata merenja koji je u funkciji broja merenja pri formiranju raspona. Za izračunavanje verovatnoće \hat{p}_j , formula (6.3.3) ostaje u važnosti s tim što se umesto $F(u)$ koristi funkcija rasporeda normiranog rasporeda $F(W)$, pri čemu je:

$$W_m = \frac{w_m}{\hat{\sigma}}, \quad (6.3.6)$$

w_m - raspon rezultata merenja;

$\hat{\sigma}$ - ocena standardne greške pojedinog rezultata merenja iz kojih se formira raspon merenja;

m - broj rezultata pri formiranju raspona.

Ocena $\hat{\sigma}$, u ovom slučaju, može se dobiti po formuli

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{w}_m}{\alpha_m}, \quad (6.3.7)$$

gde je: \bar{w}_m - aritmetička sredina iz svih raspona,

α_m - koeficijent koji predstavlja očekivanu vrednost normiranog raspona W_m , a uzima se iz tablica rasporeda raspona po argumentu m .

Broj nepoznatih parametara σ u formuli (6.3.1), u ovom slučaju, iznosi a) dva - ako je nepoznato σ ; b) jedan - ako je poznato σ .

3. Testiranje normalnosti rasporeda rezultata merenja pomoću srednje kvadratne greške rezultata merenja. I u ovom slučaju, kao i u slučaju testiranja normalnosti preko raspona, potrebno je imati serije merenja sa istim brojem merenja u svim serijama.

Neka ima n serija sa m rezultata merenja u svakoj seriji. Za svaku seriju merenja izračuna se $\hat{\sigma}_i^2$, $i=1,2,\dots,n$, iz odstupanja od aritmetičke sredine i ocena za σ^2 iz svih rezultata po formuli

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i^2, \quad f=n(m-1). \quad (6.3.8)$$

Za veličinu, količnik ocena, važi

$$(m-1) \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}^2} \sim \chi_{m-1}^2 \quad (6.3.9)$$

I u ovom slučaju koristi se Pirsonov χ^2 -test t.j. važi formula (6.3.1) i (6.3.3), s tim što umesto veličine u u formuli (6.3.3) koristi se

$$(m-1) \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}^2} \quad \text{i} \quad (m-1) \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}^2} - \text{pri poznatom } \sigma$$

odnosno

$$(m-1) \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}^2} \quad \text{i} \quad (m-1) \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{\sigma}^2} - \text{pri nepoznatom } \sigma.$$

Pri poznatom σ broj c u (6.3.1) iznosi 1, a pri nepoznatom σ iznosi 2.

4. *Testiranje normalnosti rasporeda linearnih merenja.* U deformacionim merenjima smatraće se da se najveći broj merenja izvodi pomoću elektro-optičkih daljinomera; što znači da postoji mogućnost provere rezultata merenja na normalnost rasporeda.

Provera normalnosti rasporeda rezultata ovih linearnih merenja može se izvesti:

- pomoću raspona dvostrukih merenja (dvostrukih čitanja) na stanici;
- pomoću raspona merenja napred-nazad;
- pomoću srednje kvadratne greške, za slučaj merenja u serijama.

Testiranje normalnosti rasporeda pomoću raspona merenja izvodi se na način kako je objašnjeno u tački 2. ovog potpoglavlja (6.3.1), a pomoću srednje kvadratne greške na način kako je objašnjeno u tački 3. ovog potpoglavlja.

6.3.2. Testiranje homogenosti tačnosti

Homogenost tačnosti rezultata merenja potrebno je testirati unutar epoha merenja i između epoha merenja. Homogenost tačnosti unutar epoha merenja ispituje se radi pravilnog odredjivanja težina, pravilne primene dozvoljenih odstupanja i radi pravilnog testiranja hipoteza. Ako homogenost tačnosti rezul-

tata merenja izmedju epoha ne bi bila ista onda bi testiranje hipoteza bilo vrlo komplikovano, odnosno u slučaju iste homogenosti tačnosti formule za testiranje hipoteza veoma se pojednostavljaju.

1. *Testiranje homogenosti tačnosti rezultata merenja unutar epoha.*
Testiranje homogenosti tačnosti uglovnih veličina može se izvoditi pomoću srednjih kvadratnih grešaka dvostrukih kolimacija i srednjih kvadratnih grešaka uglova.

Neka su za k serija merenja (u epohi) na raspolaganju srednje kvadratne greške

$$m_1^2, m_2^2, \dots, m_k^2$$

sa f_1, f_2, \dots, f_k stepeni slobode.

a) Ako je $k=2$, formira se test veličina

$$F = \frac{m_1^2}{m_2^2}, \text{ za } m_1^2 > m_2^2 \text{ ili } F = \frac{m_2^2}{m_1^2}, \text{ za } m_2^2 > m_1^2 \quad (6.3.10)$$

koja ima F -raspored sa f_1 i f_2 , odnosno f_2 i f_1 stepeni slobode.

Hipoteza H_0 : rezultati merenja prve i druge serije su homogene tačnosti, odnosno $M(\hat{\sigma}_1^2) = M(\hat{\sigma}_2^2)$, se prihvata ako je F manje od tablične vrednosti za odgovarajući nivo značajnosti; u protivnom hipoteza H_0 se odbacuje.

b) Ako je $k \geq 3$ formira se test veličina

$$\chi^2 = \frac{1}{c} (f \ln m^2 - \sum_{i=1}^k f_i \ln m_i^2) \sim \chi_{k-1}^2 \quad (6.3.11)$$

koja je aproksimativno raspoređena kao χ^2 sa $k-1$ stepeni slobode, pri čemu je

$$C = 1 + \frac{1}{3(k-1)} \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} - \frac{1}{f} \right), \quad f = \sum_{i=1}^k f_i \quad (6.3.12)$$

$$m^2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^k f_i m_i^2. \quad (6.3.13)$$

$$\text{Hipoteza } H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2 \quad (6.3.14)$$

gde je $\sigma_i^2 = M(m_i^2)$ prihvata se za slučaj da je χ^2 manje od tablične vrednosti. U protivnom odbacuje se.

Napomena: Ovaj test daje dobre rezultate (moć mu je vrlo velika) pri $f_i > 4$, $i=1,2,\dots,k$.

2. *Testiranje homogenosti tačnosti izmedju epoha.* Ovo testiranje izvodi se tako što se prvo sračunaju ocene

$\hat{\sigma}_1^2$ sa $f_1 = n_1 - u_1$ stepeni slobode, za epohu 1, i

$\hat{\sigma}_2^2$ sa $f_2 = n_2 - u_2$ stepeni slobode, za epohu 2,

pri čemu je:

$\hat{\sigma}_i^2$ ($i=1,2$) - ocena disperzije jedinice težine na osnovi rezultata merenja iz epohe 1 i 2;

n_i ($i=1,2$) - broj rezultata merenja u epohi 1 i 2;

u_i ($i=1,2$) - broj nepoznatih (pri izravnanju) u epohi 1 i 2.

Zatim se formira test veličina

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}, \text{ za } \hat{\sigma}_1^2 > \sigma_2^2 \text{ ili } F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2}, \text{ za } \sigma_2^2 > \sigma_1^2 \quad (6.3.15)$$

pri čemu test veličina F ima F -raspored sa f_1 i f_2 , odnosno f_2 i f_1 stepeni slobode, pa ako je F manje od tablične vrednosti za odgovarajući nivo značajnosti onda se prihvata hipoteza o homogenosti tačnosti rezultata merenja izmedju epoha 1 i 2. U protivnom odbacuje se.

Napomena. Ako se vodi računa o parametrima navedenim u poglavlju 2 (geodetske mreže za deformaciona merenja), onda će test o homogenosti tačnosti rezultata merenja izmedju epoha imati vrlo visoku sigurnost prihvatanja - što pokazuju mnogobrojna dosadašnja ispitivanja.

6.3.3. Testiranje korelisanosti rezultata merenja

Ovo testiranje je značajno iz razloga što su skoro sve formule, koje se koriste pri izravnanju mreža, izvedene pod statističkim modelom koji pretpostavlja nekorelisanost rezultata merenja. Da bi se ti modeli i stvarno mogli koristiti neophodno je testiranjem potvrditi ove pretpostavke.

Testiranje korelisanosti rezultata merenja izvodi se preko koefici-

jenta korelacije r .

1. Za slučaj poznatih standardnih grešaka slučajnih i sistematskih grešaka merenja koeficijent korelacije moguće je unapred odrediti. Tako, ako je

σ_ϵ - standardna greška slučajnih grešaka ϵ , a

σ_δ - standardna greška sistematskih grešaka δ , onda je

$$r = \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_\epsilon^2 + \sigma_\delta^2} \quad (6.3.16)$$

Zanemarljivost koeficijenta korelacije rezultata merenja direktno zavisi od koeficijenta zanemarljivosti sistematskih grešaka (u odnosu na slučajne greške). U primenama se uzima za $|r| \leq 0,10$, da ne postoji korelacija; za $|r| \leq 0,30$, da postoji vrlo slaba korelacija, a za $|r| \leq 0,50$ - da postoji slaba korelacija.

Neuzimanje u obzir korelisanosti rezultata merenja odražava se na rezultate izravnjanja kao pogrešno usvojena matrica težina. Pogrešno usvojena matrica težina ne deformiše ocene vektora nepoznatih - ocena vektora nepoznatih je nepomerena, dok je ocena disperzije jedinice težine pomerena. Ta veličina pomeranja može se proceniti iz formule

$$\frac{M(\hat{v}^T W \hat{v})}{n-u} = \frac{\sigma^2}{n-u} \text{trag} \left[P^{-1} (W - W A_1^T W A_1)^{-1} A_1^T W \right] \neq \sigma^2 \quad (6.3.17)$$

- Koch 1980, Perović 1986 (u rukopisu), zamenom W sa $P + \Delta W$, pri čemu ΔW mora biti pozitivno određeno, a

A_1 - predstavlja podmatricu u jednačinama popravaka kod koje je $r(A_1) = r$;

W - usvojena (pogrešno) matrica težina;

P - prva matrica težina rezultata merenja.

Medjutim, poznato je da greška u matrici težina deluje u rezultatima izravnjanja kao veličine drugog reda. S toga matricu težina i nije potrebno poznavati strogo tačno.

2. Za slučaj nepoznatih standardnih grešaka σ_ϵ i σ_δ testiranje korelisanosti rezultata merenja izvodi se pomoću test veličine

$$u = \frac{r' - r}{\sqrt{\frac{1 - r'^2}{n - 1}}} \quad \begin{array}{l} \text{za velike vrednosti } n \\ \text{i za male vrednosti } n, \end{array} \quad (6.3.18)$$

koja je aproksimativno normalno raspoređena sa parametrima $(0,1)$ - pri poznatom r , i pomoću test veličine.

$$t = \frac{\frac{r'}{\sqrt{1 - r'^2}}}{f} \sim t_f, \quad f = n - 2 \quad (6.3.19)$$

gde je n - broj rezultata merenja a

r' - empirijski koeficijent korelacije.

Hipoteza $H_0: r = 0$ prihvata se pri

$$|u| < u_{1-\alpha} \quad \text{- pri poznatom } r,$$

i

$$|t| < t_{1-\alpha}(f) \quad \text{- pri nepoznatom } r.$$

6.3.4. Testiranje grubih grešaka

Testiranje rezultata merenja radi otkrivanja opažanja koja sadrže grube greške i njihovog eliminisanja neophodno je zato što neotkrivene grube greške u opažanjima mogu dovesti do pogrešnih zaključaka a nastalim deformacijama i o oceni tačnosti. Geodetska mreža koja slabo kontroliše grube greške nepouzdana je i nije podesna za određivanje deformacija, jer je veliki rizik davanja pogrešnih zaključaka o mogućim deformacijama. Kontrolna geodetska mreža je pouzdana ako omogućava da se i najmanje grube greške otkriju. O otkrivanju opažanja sa grubim greškama pomoću ocena popravaka iz izravnjanja i o uticaju neotkrivenih grubih grešaka na ocene koordinata tačaka detaljno je govoreno u poglavlju 2.10.2. Pre početka merenja vrši se detaljna analiza celokupnog procesa merenja u cilju optimizacije procesa merenja o čemu je detaljnije govoreno u poglavlju 2.1, 2.4 i 2.5. Zato će se ovde dati samo kontrola i praćenje rezultata na grube greške u procesu merenja.

Neka ima n rezultata merenja i neka su označeni sa X_1, X_2, \dots, X_n . Dalje se pretpostavlja da su ovi rezultati normalno raspoređeni oko očekivane

vrednosti $\alpha = M(X_i)$ sa disperzijom $\sigma^2 = D(X_i)$, t.j.

$$X_i \sim N(\alpha, \sigma^2) \quad (6.3.20)$$

1. Razmatra se slučaj kada samo jedan rezultat odskaače, pri čemu će se smatrati da je to X_n . To znači da se sumnja da rezultat X_n ima grubu grešku što treba proveriti. Formira se test veličina

$$u = \frac{X_n - \bar{X}}{\sigma \sqrt{\frac{n-1}{n}}} \sim N(0, 1), \quad (6.3.21)$$

na osnovu čega se nalazi da mora biti

$$|X_n - \bar{X}| < u_{1-\alpha} \sigma \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \quad (\sigma - \text{poznato}), \quad (6.3.22)$$

pri čemu je $u_{1-\alpha}$ kvantil normalnog rasporeda za nivo značajnosti α . Rezultat koji ne zadovoljava (6.3.22) odbacuje se i ponovo meri. Za slučaj nepoznatog σ sračuna se ocena

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X}_1)^2}, \quad f=n-2, \quad (6.3.23)$$

gde je $\bar{X}_1 = \frac{1}{n-1} (X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1})$.

Test veličina

$$t = \frac{X_n - \bar{X}_1}{\hat{\sigma}_1 \sqrt{\frac{n}{n-1}}} \sim t_f, \text{ sa } f=n-2, \quad (6.3.24)$$

ima Studentov raspored sa $n-2$ stepeni slobode, pa ako je

$$|X_n - \bar{X}_1| < t_{1-\alpha; f} \cdot \hat{\sigma}_1 \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \quad (6.3.25)$$

prihvata se hipoteza da rezultat X_n ne sadrži grubu grešku.

Ako je broj merenja mali, $n < 10$, onda je efektivnost kriterijuma

(6.3.25) vrlo malo. U tom cilju ocena standarda σ izvodi se iz drugog niza rezultata merenja: $X'_1, X'_2, \dots, X'_{f+1}$, pri čemu mora biti $f > 10$ (poželjno je da bude $f > 20$) po formuli

$$\hat{\sigma}' = \sqrt{\frac{1}{f} \sum_{i=1}^{f+1} (X'_i - \bar{X}')^2}, \quad (6.3.26)$$

gde je $\bar{X}' = \frac{1}{f+1} (X'_1 + X'_2 + \dots + X'_{f+1})$,

tada se dozvoljeno odstupanje računa po formuli

$$|X_n - \bar{X}| < t_{1-\alpha;f} \hat{\sigma}' \sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad (6.3.27)$$

Ako je zadovoljeno (6.3.27) onda se prihvata hipoteza H_0 da X_n ne sadrži grubu grešku.

2. *Slučaj kada po jedan rezultat odskake sa obe strane opažanog skupa merenja.* U tom slučaju kao kriterijum grubih grešaka koristi se dozvoljeni raspon merenja

$$w_{1-\alpha} = \sigma W_{1-\alpha} \quad (6.3.28)$$

pri čemu je $W_{1-\alpha}$ kvantil normiranog raspona merenja, pa ako je

$$w_n = X_{(n)} - X_{(1)} < \sigma W_{1-\alpha}, \quad (6.3.29)$$

onda se prihvata hipoteza da rezultati koji odskaku (to su $X_{(1)}$ i $X_{(n)}$) ne sadrže grube greške. U protivnom hipoteza se odbacuje; oba rezultata merenja se odbacuju i ponavljaju merenja.

Ako je standard σ nepoznat onda ga treba oceniti na način kao u 1. - formula 6.3.26, pa se kao kriterijum grubih grešaka koristi izraz

$$w_n = X_{(n)} - X_{(1)} < W_{1-\alpha;f} \cdot \hat{\sigma}', \quad (6.3.30)$$

pri čemu je $W_{1-\alpha;f}$ kvantil studentizovanog raspona merenja, koji se uzima iz tablica studentizovanog raspona po parametrima n, f, α .

Napomena. Kriterijum (6.3.29) ima veliku efektivnost (skoro jedinica) pri $n \leq 6$. Pri broju merenja većem od šest kao kriterijum dozvoljenih odstupanja bolje je koristiti kvantil rasporeda srednje kvadratne greške.

Veličina

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} f \sim \chi_f^2, \quad (f=n-1), \quad (6.3.31)$$

pa ako je

$$\hat{\sigma}^2 < \frac{\chi_f^2}{f} \sigma^2, \quad (f=n-1), \quad (6.3.32)$$

onda se prihvata hipoteza da rezultat koji odskače ne sadrži grubu grešku.

Ako su poznate istinite greške $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ onda izrazi (6.3.20)-(6.3.32) ostaju u važnosti (mogu se koristiti) s tim što svuda umesto X_i treba zameniti ε_i , i pri poznatom standardu σ kao dozvoljeno odstupanje treba koristiti izraz

$$|\varepsilon_n| < u_{1-\alpha} \cdot \sigma, \quad (6.3.33)$$

gde je $u_{1-\alpha}$ kvantil normalnog rasporeda za nivo značajnosti α .

6.4. IZRAVNANJE REZULTATA MERENJA

Kod odredjivanja pomeranja i deformacija objekt i tlo zamenjuju se jednim brojem dobro izabranih karakterističkih tačaka - tačaka na objektu. Van ispitivanog objekta postavljaju se osnovne geodetske tačke i to "van" zone deformacija. Tačke na objektu i osnovne tačke spojene su u *geodetsku kontrolnu mrežu*. Kontrolna mreža treba da se projektuje tako da omogući pouzdano odredjivanje deformacija objekta i tla, pri čemu treba voditi računa o uslovima koji su dati u galavi 1 i 2.

Zaključci u vezi odredjivanja pomeranja i deformacije objekta i tla donosiće se na osnovi ispitivanja podudarnosti mreže izmedju tekuće (prve) i nulte serije merenja. Veličine iz nulte serije označavaće se sa nulom u indeksu, a veličine iz tekuće (prve) serije sa jedinicom.

Dalje se pretpostavlja:

- opažanja su normalno rasporedjena;
- opažanja nisu korelisana u seriji;
- opažanja nisu korelisana izmedju serija;
- opažanja su homogena u seriji;
- opažanja su homogena izmedju serija;
- opažanja su oslobođena grubih i sistematskih grešaka.

O razlozima uvodjenja ovih pretpostavki i načinu njihovog testiranja

detaljnije je razmatrano u poglavlju (6.2.2).

Ako važe gornje pretpostavke onda je n -dimenzionalni vektor opažanja normalno raspoređen, t.j.

$$l_i \sim N(A_i x_i, \sigma_i^2 P_i^{-1}), \quad i=0,1 \quad (6.4.1)$$

pri čemu je i -oznaka serije.

Radi dobijanja koordinata tačaka kontrolne mreže rezultati merenja iz dve epohe izravnavaju se odvojeno, za svaku epohu posebno, po metodi posrednih izravnanja.

Jednačine popravaka - funkcionalni model glasi

$$l_i + v_i = A_i x_i, \quad i=0,1 \quad (6.4.2)$$

dok je pripadajući stohastički model

$$M(v_i) = 0; K_{l_i} = M(v_i v_i^T) = \sigma_i^2 P_i, \quad i=0,1, \quad (6.4.3)$$

gde su: l_i - vektor opažanja;
 v_i - vektor popravaka;
 A_i - matrica koeficijenata jednačina popravaka;
 x_i - vektor nepoznatih;
 K_{l_i} - kovarijaciona matrica opažanja;
 P_{l_i} - matrica težina opažanja.

Izraz (6.4.3) znači da su opažanja oslobodjenja sistematskih grešaka. Matrica A_i ima nepotpun rang kolona $\text{rang}(A_i) = r_i < u_i$, pri čemu je u_i broj nepoznatih, pa je defekt $d_i = d(A_i) = u_i - r_i$.

Pod uslovom

$$v_i^T P_{l_i} v_i = \min,$$

dobijaju se normalne jednačine

$$N_i x_i = n_i. \quad (6.4.4)$$

Kako ne stoje na raspolaganju nikakve informacije o DATUMU to su normalne jednačine singularne, imaju defekt ranga d . Postoje mnoge metode rešavanja ovih singularnih normalnih jednačina (Rao i Mitra 1971 i poglavlja 2.11). Ovde je

korišćeno rešenje po metodi najmanjih kvadrata (klasično izravnanje). Kao što je poznato vektor nepoznatih x se deli na dva podvektora x_1 i x_2 tako da su u podvektoru x_2 sadržani uslovi za DATUM; priraštaji nepoznatih za tačke koje definišu DATUM su nula - definitivne koordinate su jednake približnim koordinatama, a u podvektoru x_1 sadržani su priraštaji koordinata tačaka koje ne definišu DATUM. U tom slučaju rešenje normalnih jednačina je (izostavljen je indeks i - oznaka epohe)

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}, \quad (6.4.5)$$

sa kovarijacionom matricom

$$K_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} K_{\bar{x}_1} & 0 \\ 0 & K_{\bar{x}_2} = 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4.6)$$

Ocena vektora popravaka je

$$\hat{v}_i = A_i \bar{x}_i - l_i, \quad i=0,1, \quad (6.4.7)$$

a ocena disperzije jedinice težine

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{v}_i^T K_{\bar{x}_i}^{-1} \hat{v}_i}{n_i - u_i + d_i}, \quad i=0,1. \quad (6.4.8)$$

Ako su merenja u dve epohe homogene tačnosti, onda se za disperziju jedinice težine može dobiti bolja ocena po formuli

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{f_0 \hat{\sigma}_0^2 + f_1 \hat{\sigma}_1^2}{f_0 + f_1} \quad \text{sa} \quad f = f_0 + f_1. \quad (6.4.9)$$

Radi toga je potrebno ispitati homogenost tačnosti dveju serija merenja (videti poglavlje (6.3) testira se hipoteza

$$H_0 : M(\hat{\sigma}_1^2) = M(\hat{\sigma}_2^2) = \sigma^2. \quad (6.4.10)$$

Formira se test veličina

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}, \text{ za } \hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2 \text{ ili } F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2}, \text{ za } \hat{\sigma}_2^2 > \hat{\sigma}_1^2. \quad (6.4.11)$$

prema formuli (6.3.15). Test veličina (6.4.11) ima F -raspored sa f_1 i f_2 stepeni slobode, odnosno f_2 i f_1 stepeni slobode, pa ako je F manje od tablične vrednosti za odgovarajući broj stepeni slobode onda se prihvata hipoteza o homogenosti tačnosti rezultata merenja u epohama 0 i 1. U protivnom hipoteza se odbacuje. Ako je dokazana homogenost, to je jedna od pretpostavki koju moraju da zadovolje rezultati merenja u obe epohe, tada se bolja ocena za disperziju jedinice težine računa po formuli (6.4.9).

Pošto je, pri formiranju test veličina potrebno koristiti, razlike koordinata koje su ocenljive, a razlike

$$\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \text{ i } \bar{d} = \hat{x}_1 - \hat{x}_0, \quad (6.4.12)$$

pri čemu je \hat{x}_i ($i=0,1$) rešenje normalnih jednačina (6.4.5) pod uslovom minimalne norme rešenja, nisu ocenljive, onda ih je potrebno učiniti ocenljivim. Ove razlike koordinata biće ocenljive ako se transformacijom ličnosti ocene koordinate tekuće serije transformišu na ocene koordinata nulte serije. Zato se može koristiti S -transformacija (videti poglavlje 2.11), ili Helmertova transformacija. Ovde je korišćena Helmertova transformacija za transformisanje koordinata prve (tekuće) na nultu seriju. Formirane su jednačine popravaka

$$v_{\bar{x}_1} = G t + (\bar{x}_1 - \bar{x}_0), \quad (6.4.13)$$

gde su:

\bar{x}_1 i \bar{x}_0 - koordinate tačaka prve i nulte serije respektivno,

$v_{\bar{x}_1}$ - vektor popravaka koordinata,

$t^T = |c_x \ c_y \ c_\phi \ c_q|$, nepoznati parametri transformacije (dve translacije, rotacija i promena razmere)

G - matrica koeficijenata uz nepoznate koja može imati sledeće oblike

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1^0 & y_1^0 \\ 0 & 1 & -y_1^0 & x_1^0 \\ 1 & 0 & x_2^0 & y_2^0 \\ 0 & 1 & -y_2^0 & x_2^0 \\ 1 & 0 & x_n^0 & y_n^0 \\ 0 & 1 & -y_n^0 & x_n^0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{- za slučaj kada su u mreži} \\ \text{mereni samo uglovi;} \end{array} \quad (6.4.14a)$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1^0 \\ 0 & 1 & -y_1^0 \\ 1 & 0 & x_2^0 \\ 0 & 1 & -y_2^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_n^0 \\ 0 & 1 & y_n^0 \end{bmatrix} \quad - \text{ za slučaj kada su u mreži } \quad (6.4.14b)$$

mereni uglovi i dužine;

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{ kada su mereni uglovi, dužine i } \quad (6.4.14c)$$

nagibi (azimuti).

x_i^0, y_i^0 ($i=0,1$) - približne koordinate tačaka.

Koeficijente u trećoj koloni matrice G treba uzimati u $[cm/\rho'']$, a u četvrtoj u $[km]$, u tom slučaju nepoznate c_ϕ imaće dimenzije $['']$ a nepoznate c_q $[cm/km]$.

Elementi transformacije t ocenjuju se iz jednačine (6.4.13) pod uslovom

$$v_{\bar{x}_1}^T v_{\bar{x}_1} = \text{minimum}, \quad (6.4.15)$$

pri čemu se dobija

$$\hat{t} = - (G^T G)^{-1} G^T (\bar{x}_1 - \bar{x}_0), \quad (6.4.16)$$

odnosno

$$\hat{t} = - (G^T G)^{-1} G^T \bar{x}_1 + (G^T G)^{-1} G^T \bar{x}_0. \quad (6.4.17)$$

Sada se transformisane koordinate prve serije na nultu seriju dobijaju po formuli

$$\bar{x}_1^{-1} = G t + \bar{x}_1 = (E - G(G^T G)^{-1} G^T) \bar{x}_1 + G(G^T G)^{-1} G^T \bar{x}_0. \quad (6.4.18)$$

Sada će razlike

$$\bar{d} = \bar{x}_1' - \bar{x}_0 = H(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) \quad (6.4.19)$$

pri čemu je

$$H = E - G(G^T G)^{-1} G^T \quad (6.4.20)$$

predstavljati ocenljive funkcije, pa kao takve mogu poslužiti za formiranje test veličina pri testiranju hipoteza o podudarnosti mreže u obe serije. Pri tome je potrebno za ovako formirane razlike \bar{d} naći i matricu koeficijenata težina Q_d . Zamenjujući (6.4.18) u (6.4.19) nalazi se da je

$$Q_d = H(Q_{\bar{x}_1} + Q_{\bar{x}_0})H. \quad (6.4.21)$$

Pseudoinverzija za Q_d može se dobiti po formuli

$$Q_d^+ = (Q_d + GG^T)^{-1} - GG^T, \quad (6.4.22)$$

pri čemu je G iz (6.4.14).

Ovde treba naglasiti da, u mreži sa merenim dužinama, dužine i uglovi spadaju u ocenljive veličine, a u mreži sa merenim samo uglovima, uglovi spadaju u ocenljive veličine, pa ako se dužine i uglovi koriste za formiranje test veličina to nije potrebno vršiti transformaciju koordinata prve na nultu seriju. Odnosno pri ovom testiranju mogu se koristiti ocene nepoznatih iz klasičnog izravnjanja.

6.5. TESTIRANJE PODUDARNOSTI MREŽE

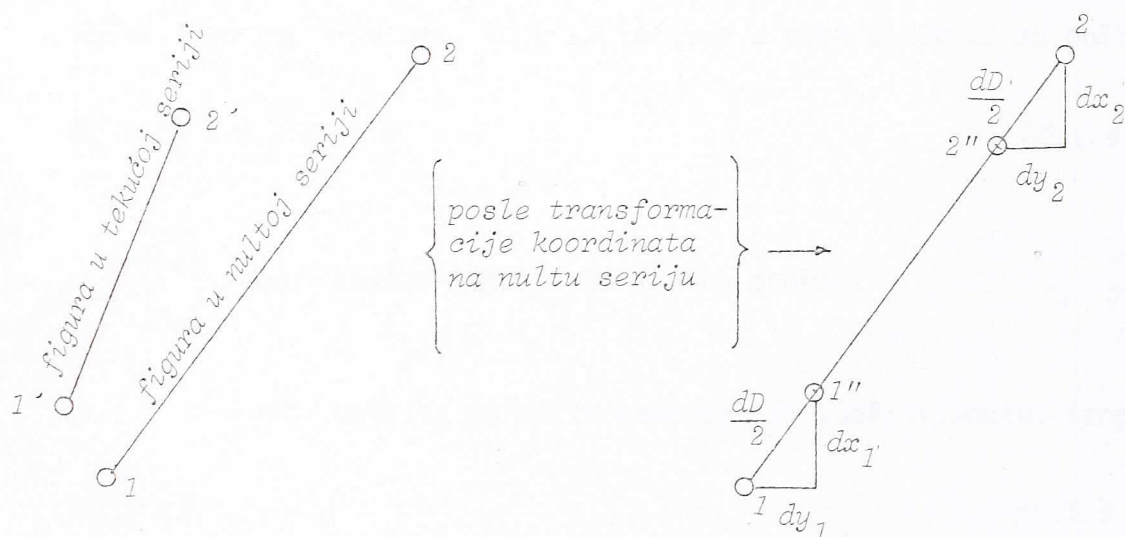
6.5.1. Izbor test veličina

U analizi geodetskih deformacionih merenja izbor test veličina igra veoma važnu ulogu iz razloga što od tog izbora zavisi stepen otkrivanja deformacija koji je u direktnoj vezi sa moći testa.

U ovom radu vodilo se računa o izboru test veličina, pa se tako, pored korišćenja uobičajene test veličine sa razlikama koordinata koristila i test veličina sa dužinama i uglovima.

Sada će biti prikazano kako se došlo na ideju da se osim testova sa razlikama koordinata koriste i testovi sa dužinama i uglovima.

Pri transformaciji figura sa dve tačke, kada su merene dužine, nastaje sledeća situacija



Sl. 6.5.1

Pod pretpostavkom da rezultati merenja ne sadrže greške merenja razlika

$$dD = D' - D \quad (6.5.1)$$

- predstavlja stvarnu deformaciju dužine. Pri testiranju sa test veličinama koje koriste razlike koordinata, za slučaj kada bi bilo $Q_{d_x} = E$, tada bi se u test veličini pojavio iznos za pomeranje

$$(d_{y_1}^2 + d_{x_1}^2) + (d_{y_2}^2 + d_{x_2}^2) = \left(\frac{dD}{2}\right)^2 + \left(\frac{dD}{2}\right)^2 = \frac{dD^2}{2} \quad (6.5.2)$$

Pri testiranju sa test veličinama koje koriste dužine (rastojanja), za slučaj kada bi bilo $Q_{dD} = E$, tada bi se u test veličini pojavio iznos

$$dD^2 \quad (6.5.3)$$

Kako bi test veličine (6.5.2) i (6.5.3) pod odredjenim uslovima, imale F -raspored sa 1 i ∞ stepeni slobode, to bi test koji odgovara veličini (6.5.3) imao veću moć, što je autora ovog rada, zajedno sa G. Perovićem, navelo na to da pri ovoj analizi koristi i test veličine sa dužinama. Pošto se pomeranja tačaka koja su upravna na pravac rastojanja odražavaju u uglovima to su se pri ovim testiranjima takodje koristili i uglovi.

6.5.2. Testiranje podudarnosti stabilnih tačaka

Opšte linearne hipoteze, koje se koriste u ovom slučaju, su oblika

$$H_0 : Hx = H M(\bar{x}) = w \quad (6.5.4)$$

gde je:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} - u \times 1 \text{ vektor nepoznatih iz obe epohe;} \quad 6.5.5$$

H - $m \times u$ matrica poznatih konstantnih koeficijenata, ranga

$$r(H) = h = u - d \quad (6.5.6)$$

$$\bar{d} = \bar{d}_0 + \bar{d}_1 \quad - \text{ ukupan defekt iz obe epohe;} \quad (6.5.7)$$

$$u = u_0 + u_1 \quad - \text{ ukupan broj nepoznatih iz obe epohe;} \quad (6.5.8)$$

$$w = m \times 1 \quad - \text{ vektor poznatih konstanti;}$$

pri čemu je hipoteza H testiva.

Test veličina je

$$T = \frac{(\bar{d}^T Q_d^{-1} \bar{d})/h}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{h,f} \mid Hx = w, \quad (6.5.9)$$

gde je:

- d - odstupanje od hipoteze H_0 ; a
 $\hat{\sigma}^2$ - ocena disperzije jedinice težine prema (6.4.9)
 $f = f_0 + f_1$ - ukupan broj stepeni slobode pri računanju $\hat{\sigma}^2$

Hipoteza H_0 se prihvata ako je

$$T < F_{1-\alpha; h, f} \quad (6.5.10)$$

u protivnom odbacuje se.

1. *Testiranje hipoteza sa razlikama koordinata.* Neka se ispituje podudarnost k tačaka, i neka su to prvih k tačaka u vektoru nepoznatih (ako nisu prvih k tačaka može se izvršiti prenumeracija tako da budu prvih k tačaka). U ovom slučaju hipoteza (6.5.4) je oblika

$$H_0 : M(d) = H M(\bar{x}) = 0, \quad H = \begin{bmatrix} -E_{2k} & 0 & E_{2k} & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5.11)$$

gde je:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}, \quad (6.5.12)$$

$$\bar{x}_0^T = [\bar{y}_{01} \quad \bar{x}_{01} \quad \bar{y}_{02} \quad \bar{x}_{02} \quad \dots \quad \bar{y}_{0k} \quad \bar{x}_{0k} \quad \dots \quad \bar{y}_{0p} \quad \bar{x}_{0p}] - \text{ocena koordinata nulte serije}$$

$$\bar{x}_1^T = [\bar{y}_{11} \quad \bar{x}_{11} \quad \bar{y}_{12} \quad \bar{x}_{12} \quad \dots \quad \bar{y}_{1k} \quad \bar{x}_{1k} \quad \dots \quad \bar{y}_{1p} \quad \bar{x}_{1p}] - \text{ocena transformisanih koordinata prave na nultu seriju}$$

E_{2k} - jedinična matrica reda $2k$,

$$r(H) = h = 2k - d, \quad (d - \text{defekt ranga}).$$

Vektor odstupanja od hipoteze H_0 glasi

$$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \quad (6.5.13)$$

Ovde treba posebno naglasiti da samo prvih k tačaka učestvuje u odredjivanju koeficijenata transformacije (vektor t), u kom slučaju matrica koeficijenata težina ima minimalni trag samo za prvih k tačaka.

Vektor odstupanja d (6.5.13) od hipoteze H_0 (6.5.11) može se dobiti

i pomoću S -transformacije (podpoglavlje 2.11.7, formule 2.11.15, 2.11.25 i 2.11.26). Takodje i pripadajuća matrica Q_d , koja ima minimalan trag samo za deo mreže sastavljen od k tačaka, može se dobiti pomoću S -transformacije.

Test veličina prema (6.5.9) glasi

$$T = \frac{(d^T Q_d^+ d)}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{h,f} \mid H M(\bar{x}) = 0 \quad (6.5.14)$$

gde su:

- d - $2k \times 1$ vektor odstupanja od hipoteze
- $\hat{\sigma}^2$ - ocena disperzije jedinice težine prema (6.4.9);
- h - rang matrice H ;
- $f = f_0 + f_1$ - ukupan broj stepeni slobode pri oceni $\hat{\sigma}^2$ iz nulte i prve epohe;
- Q_d^+ - pseudoinverzija od Q_d prema (6.4.22)
- Q_d - matrica koeficijenata težina vektora odstupanja od hipoteze prema (6.4.21).

Test oblika (6.5.14) formira se za sve kombinacije po dve tačke, po tri tačke, i td., za k tačaka.

Dalje se formira tabela test veličina (6.5.14) za svaku kombinaciju i upišu brojevi tačaka za koje se ispituje podudarnost. Zatim se za svaku kombinaciju poredjuje vrednost test veličine sa tabličnom vrednošću, pa ako je

$$T < F_{1-\alpha, h, f} \quad (6.5.15)$$

onda se prihvata nulta hipoteza o podudarnosti tog dela mreže sa odgovarajućim nivoom značajnosti α , u protivnom se odbacuje. Tačke kombinacije za koju je prihvaćena hipoteza o podudarnosti označavaju se (nekim znakom) u tabeli.

Posle ispitivanja podudarnosti mreže, za $k = 2, 3, \dots, p$ tačaka u svim kombinacijama i označavanja svih kombinacija za koje postoji saglasnost podudarnosti (važi formula (6.5.15) pristupa se pretrazi tabele. Uoče se one tačke koje su označene u najvećem broju kombinacija i izdvoje u poseban skup. Neka tako izdvojeni skup čini q tačaka. Pri tome je bitno naglasiti da test veličina mora biti prihvaćena za sve kombinacije u kojima se ispituje podudarnost za tačke iz izdvojenog skupa od q tačaka.

U tom slučaju izdvojeni skup od q tačaka smatra se skupom stabilnih

tačaka za odgovarajući nivo značajnosti.

2. *Testiranje hipoteza sa razlikama dužina i uglova.* Ovde se razmatra ispitivanje podudarnosti mreže u k tačaka. Kada se koristi testiranje hipoteza sa razlikama dužina i uglova smatraće se da su dužine i uglovi ocenljive veličine. U ovom slučaju hipoteza (6.5.4) je oblika

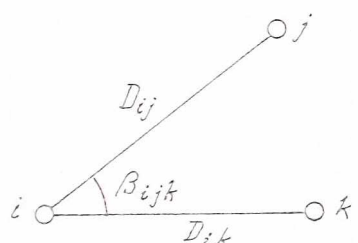
$$H_0 : M(d) = H M(\bar{x}) = 0, \quad H = [-C \quad C], \quad (6.5.16)$$

gde su:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix}, \quad (6.5.17)$$

$$d = H \bar{x}, \quad (6.5.18)$$

- vektor odstupanja od hipoteze H_0 (6.5.16) t.j. vektor razlika dužina i uglova iz prve i druge serije. Na primer, za kombinaciju od 3 tačke (sl. 6.5.2) vektor d (6.5.16) je oblika



$$d = \begin{bmatrix} D_{ij} - D_{ij}^0 \\ D_{ik} - D_{ik}^0 \\ \beta_{ijk} - \beta_{ijk}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dD_{ij} \\ dD_{ik} \\ d\beta_{ijk} \end{bmatrix} \quad (6.5.19)$$

Sl. 6.5.2

D'_{ij} , D'_{ik} i β' - dužine i ugao iz prve serije;

D^0_{ij} , D^0_{ik} i β^0 - dužine i ugao iz nulte serije

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & -b'_{ij} & -a'_{ij} & \dots & b'_{ij} & a'_{ij} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -b'_{ik} & -a'_{ik} & \dots & 0 & 0 & \dots & b'_{ik} & a'_{ik} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b'_{ijk} & a'_{ijk} & \dots & -b'_{ij} & -a'_{ij} & \dots & b'_{ik} & a'_{ik} & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gde su

$$b'_{ij} = \sin n_{ij}; \quad a'_{ij} = \cos n_{ij}; \quad b'_{ik} = \sin n_{ik}; \quad a'_{ik} = \cos n_{ik}$$

$$b'_{ijk} = b'_{ik} - b'_{ij} \quad a'_{ijk} = a'_{ik} - a'_{ij}$$

$$b'_{ij} = - \frac{\cos n_{ij}}{D_{ij}} \rho \quad ; \quad a'_{ij} = \frac{\sin n_{ij}}{D_{ij}} \rho \quad ;$$

$$b'_{ik} = - \frac{\cos n_{ik}}{D_{ik}} \rho \quad ; \quad a'_{ik} = \frac{\sin n_{ik}}{D_{ik}} \rho$$

\bar{x}_0 i \bar{x}_1 - vektori koji sadrže ocene koordinata nulte odnosno prve serije (6.4.5).

Test veličina (6.5.9) je

$$T = \frac{(d^T Q_d^{-1} d)/h}{\hat{\sigma}^2} \sim F_{h,f} \mid H_0 \quad , \quad (6.5.20)$$

gde su:

d - $h \times 1$ vektor odstupanja od hipoteze H_0 ;

Q_d - matrica koeficijenata težina razlika dužina i uglova;

$f=f_0+f_1$ - ukupan broj stepeni slobode; pri oceni $\hat{\sigma}^2$ (6.4.9);

$\hat{\sigma}^2$ - ocena disperzije jedinice težine iz obe serije

Ako je

$$T < F_{1-\alpha;h,f} \quad (6.5.21)$$

onda se H_0 prihvata t.j. prihvata se hipoteza da nema pomeranja u skupu od k tačaka.

U radu je korišćen maksimalan broj linearno nezavisnih funkcija u hipotezi (6.5.16) tako da je

$$r(H) = \min (h, u_1 + u_2) = h = 2k-d, \quad (d\text{-defekt ranga}) \quad (6.5.22)$$

- t.j. matrica C ima potpun rang vrsta. U tom slučaju $C Q_{\bar{x}} C^T$ je regularno pa postoji inverzija Q_d^{-1} ;

Načini izbora maksimalnog broja linearno nezavisnih veličina d ima više. Ovde je usvojen sledeći način. Od jedne tačke do ostalih $k-1$ tačaka uzimaju se dužine i $k-2$ linearno nezavisnih uglova sa temenom u istoj tački.

Test oblika (6.5.20) formira se za sve kombinacije po dve, po tri, itd. za k tačaka.

Dalje se formira tabela u kojoj su prikazane test veličine (6.5.20) za svaku kombinaciju.

Pošto se za skup od k tačaka može formirati k ovakvih testova, pri čemu će se dobiti k različitih vrednosti test veličina, za proveru (6.5.21) koristiće se test veličina koja ima najveću vrednost. Može se odmah primetiti da pri ovom testiranju broj test veličina iznosi k , dok pri testiranju sa razlikama koordinata postoji samo jedna test veličina što ukazuje na jednu od razlika između ovih dvaju testiranja.

Dalje, slično prethodnom ispitivanju podudarnosti sa razlikama koordinata, treba u tabeli označiti one tačke i kombinacije (sa maksimalnom vrednošću test veličine) za koje važi (6.5.21). Zatim se izvrši pretraga po tabeli i uoče sve tačke koje su označene u najvećem broju kombinacija i izdvoje u poseban skup od q tačaka.

I ovde, test veličine za sve kombinacije od po $2, 3, \dots, q$ tačaka, iz skupa od q tačaka, moraju zadovoljiti (6.5.21).

6.6. ODREĐIVANJE POMERANJA TAČAKA NA OBJEKTU

Kada se definitivno formira skup od q stabilnih tačaka, tada je moguće pristupiti određivanju pomeranja ostalih $p-q$ tačaka.

Radi toga se vektor d iz (6.3.28) određuje kao razlika transformisanih koordinata prve na nultu seriju i koordinata nulte serije, pri čemu se parametri transformacije određuju samo na osnovu koordinata skupa q stabilnih tačaka.

Za ostalih $p-q$ (nestabilnih) tačaka računaju se elipse poverenja kao mera tačnosti. Na skici mreže crtaju se relativne elipse pomeranja i vektori pomeranja d , tako da ova grafička ilustracija jasno ukazuje na tačke koje imaju signifikantna pomeranja.

Postupak testiranja ovih $p-q$ tačaka kao i grafička ilustracija potpuno su isti kao u poglavlju 4.5.3.

6.7. ZAKLJUČCI U VEZI SA NOVIM POSTUPKOM

Suštinska razlika između ovog postupka i poznatih postupaka jeste što se nov postupak analize geodetskih deformacionih merenja zasniva na principu: projektni zadatak, projekat prema projektnom zadatku i realizacija projektnog rešenja prema projektu, i što se ovde polazi od minimalnog broja tačaka u ispitivanju podudarnosti mreže između dve epohe merenja. U matematičkoj statistici ovakvi postupci poznati su kao robusni.

Kada se ispitivanja deformacija odnose na mikrolokacije odnosno inžinjerske objekte i okolno tlo uvek se predviđa projektom merenja grupa tačaka na

čiju stabilnost možemo računati, s obzirom na položaj i način stabilizacije dodatne informacije. Na ovaj način ovaj postupak postaje praktično efikasan.

Otklanjanje grubih grešaka novim metodom postiže se testiranjem elementarnih veličina u procesu merenja i obrade podataka kroz projekat merenja.

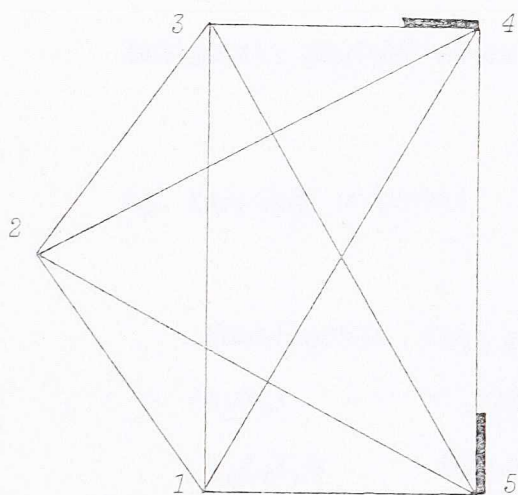
Kod ovog postupka moguće je osim korišćenih test veličina (minimalna norma vektora odstupanja, uglovi i dužine) koristiti i test veličine koje se koriste kod poznatih postupaka.

7. PRAKTIČNI PRIMERI

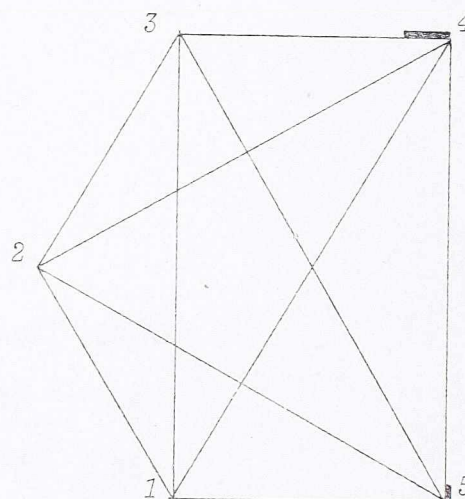
7.1. PRIMENA NA SIMULIRANE MREŽE

7.1.1. Opis mreža

Radi lakšeg upoređenja različitih postupaka odlučeno je da se simuliraju pomeranja tačaka na jednoj test mreži od pet tačaka, koja je takodje simulirana. Simulirane su dve vrste pomeranja tačaka. Prvi put su simulirana velika pomeranja, oko 50 puta veća od standardne greške merenja - mreža na slici 7.1.1a, a drugi put mala pomeranja blizu granice tačnosti merenja: tačnost merenja je reda 1 mm a pomeranja iznose 2 mm i 6 mm. Sl. 7.1.1.b.



a) I mreža



b) II mreža

SIMULIRANA POMERANJA: $\Delta y_4 = -50 \text{ mm}$,

50 mm

$\Delta x_5 = 50 \text{ mm}$

SIMULIRANA POMERANJA: $\Delta y_4 = -6 \text{ mm}$,

10 mm

$\Delta x_5 = 2 \text{ mm}$.

Sl. 7.1.1

Tačnost merenja:

	epoha nulta	epoha prva	broj merenja
uglovi	1"	1"	20
dužine	1 mm	1 mm	1

Rezultati merenja su testirani na grube greške.

7.1.2. Rezultati testiranja

A. PRVA MREŽA

A1. PELCEROV POSTUPAK

Kombinacija	Globalni test	Kvantil	DA/NE	Odbacuje se tačka
1,2,3,4,5	1040	2,55	NE	5
1,2,3,4	466	2,74	NE	4
1,2,3	1,57	3,12	DA	-

Zaključak: nestabilne su tačke 4 i 5.

A2. KARLSRUE POSTUPAK

Kombinacija	Test veličina	Kvantil	DA/NE
1,2,3	1,25	3,16	DA
1,2,3,4	634,0	2,77	NE
1,2,3,5	1356	2,77	NE

Zaključak: nestabilne su tačke 4 i 5.

A3. VELŠOV POSTUPAK

Kombinacija	Tačke sa najvećom test veličinom	Test veličina	Kvantil	DA/NE
1,2,3,4,5	4	1749	2,93	NE
1,2,3,5	5	1437	3,16	NE
1,2,3	1	1,95	3,55	DA

Zaključak: nestabilne su tačke 4 i 5.

A4. POSTUPAK UKLAPANJA U SVIM KOMBINACIJAMA
(vidi Tabelu 7.1.4., Str. 135.)

Zaključak: Pretragom po tabeli 7.1.4 nije teško uočiti da tačke 1,2 i 3 pokazuju stabilnost u kombinacijama sa po dve i sa po tri tačke, odakle sledi zaključak da su tačke 1,2 i 3 stabilne tačke, odnosno da su tačke 4 i 5 nestabilne.

B. DRUGA MREŽA

B1. PELCEROV POSTUPAK

Kombinacija	Globalni test	Kvantil	DA/NE	Odbacuje se tačka
1,2,3,4,5	7,68	2,55	NE	4
1,2,3,5	3,84	2,74	NE	5
1,2,3	1,77	3,12	DA	-

Zaključak: nestabilne su tačke 4 i 5.

B2. KARLSRUE POSTUPAK

Kombinacija	Test veličina	Kvantil	DA/NE
1,2,3	2,10	3,16	DA
1,2,3,4	19,5	2,77	NE
1,2,3,5	4,31	2,77	NE

Zaključak: Nestabilne su tačke 4 i 5

B3. VELŠOV POSTUPAK

Kombinacija	Tačka sa najvećom test veličinom	Test veličina	Kvantil	DA/NE
1,2,3,4,5	4	11,52	2,93	NE
1,2,3,5	5	3,52	3,16	NE
1,2,3		1,95	3,55	DA

Zaključak: Nestabilne su tačke 4 i 5

B4. POSTUPAK UKLAPANJA U SVIM KOMBINACIJAMA

(vidi tabelu 7.1.5, str. 136)

Zaključak: pretragom po Tabeli 7.1.5 zaključuje se da tačke 1,2 i 3 spadaju u grupu stabilnih tačaka, odnosno da tačke 4 i 5 spadaju u grupu nestabilnih tačaka.

7.1.3. Uporedjenje moći postupaka

Moguće je uporedjivati postupke pomoću moći testova. Odredjivanje najmoćnijeg testa povezano je sa dva bitna problema: Prvo, veoma je teško pronaći najmoćniji test i drugo, veoma je teško matematički odrediti najmoćniji test. Međutim, ipak je moguće nešto uraditi u ovom pravcu, a naime moguće je odrediti relativnu moć testova u svakom konkretnom slučaju, i na taj način doći do saznanja koji je test moćniji (u konkretnom slučaju) od ostalih. Ovi zaključci mogu se izvesti na osnovi verovatnoće α_T , test veličine T , koja se dobija iz tablica rasporeda veličine T po argumentu T sa odgovarajućim stepenima slobode. U koliko je α_T manje onda je moć testa veća, tako da se na taj način testovi mogu relativno uporedjivati.

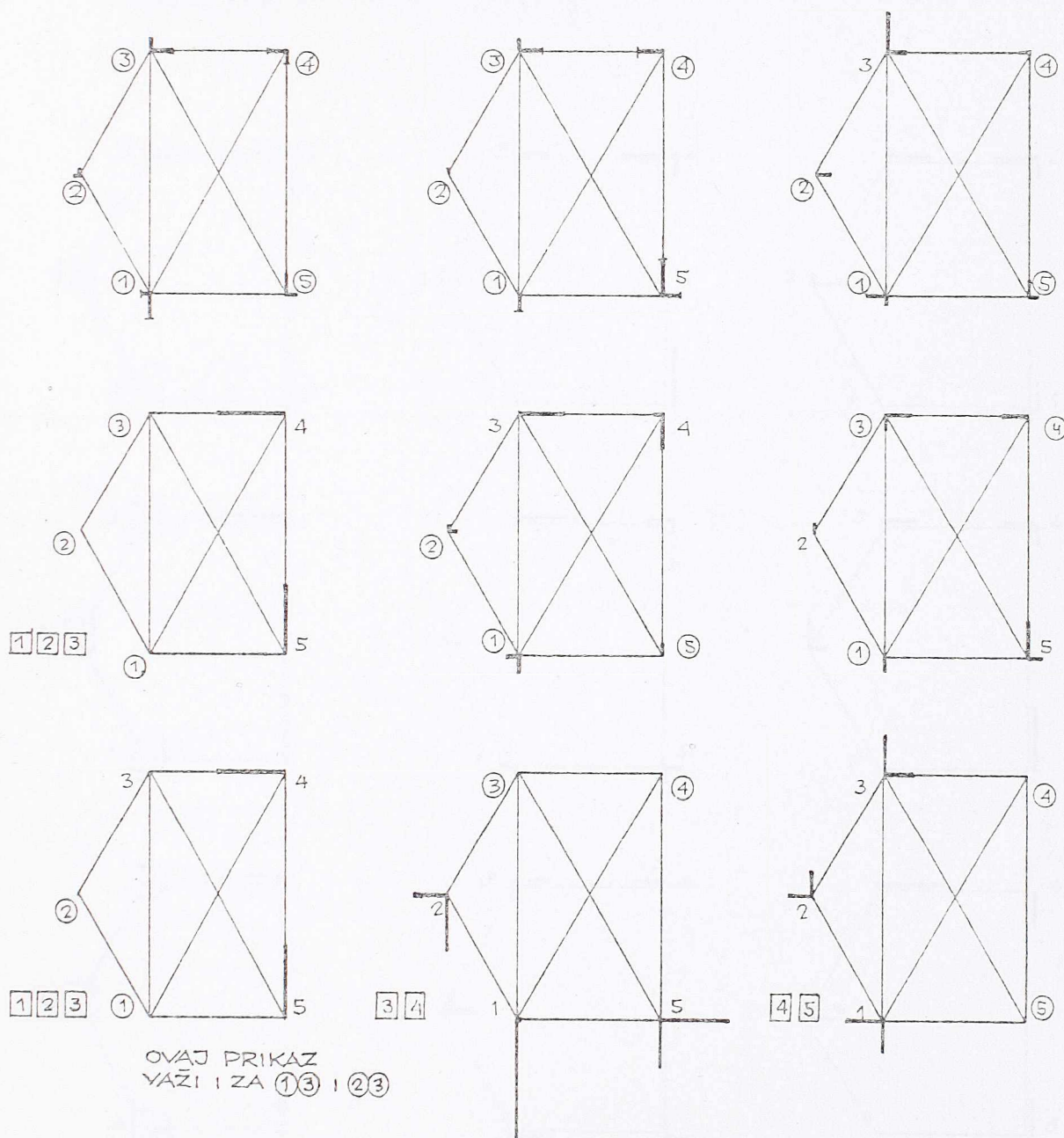
U slučaju testiranja prve mreže za sve testove dobijena veličina α_T manja je od $1 \cdot 10^{-15}$, što pokazuje da u ovom slučaju svi testovi sigurno otkrivaju nestabilne tačke.

U slučaju testiranja druge mreže dobijaju se sledeći rezultati

Postupak	Veličina α_T za broj tačaka u kombinaciji		
	5	4	3
Pelcer	0,000322	0,016200	-
Kalsrue	-	0,0000011	
Velš	0,0001	0,037	
Kombinacije	0,000005	0,0000005 manje od $1 \cdot 10^{-6}$	

Pretragom veličine α_T u prethodnoj tabeli može se zaključiti da postupak testiranja uklapanja mreže u svim kombinacijama ima manje α_T od ostalih metoda, odakle sledi zaključak da je relativna moć testiranja ovom metodom najveća. Međutim, ovde se mora naglasiti da se može desiti slučaj da α_T u nekoj kombinaciji bude veće od α_T za isti skup tačaka druge metode. Ovo su iznimni slučajevi koji se mogu desiti i kod bilo koje druge metode.

GRAFIČKI PRIKAZ POMERANJA TAČAKA IZVESNOG BROJA
KOMBINACIJA IZ TABELA 7.1.1 (MERENI SU SAMO UGLOVI)



RAZMERA MREŽE

100 m

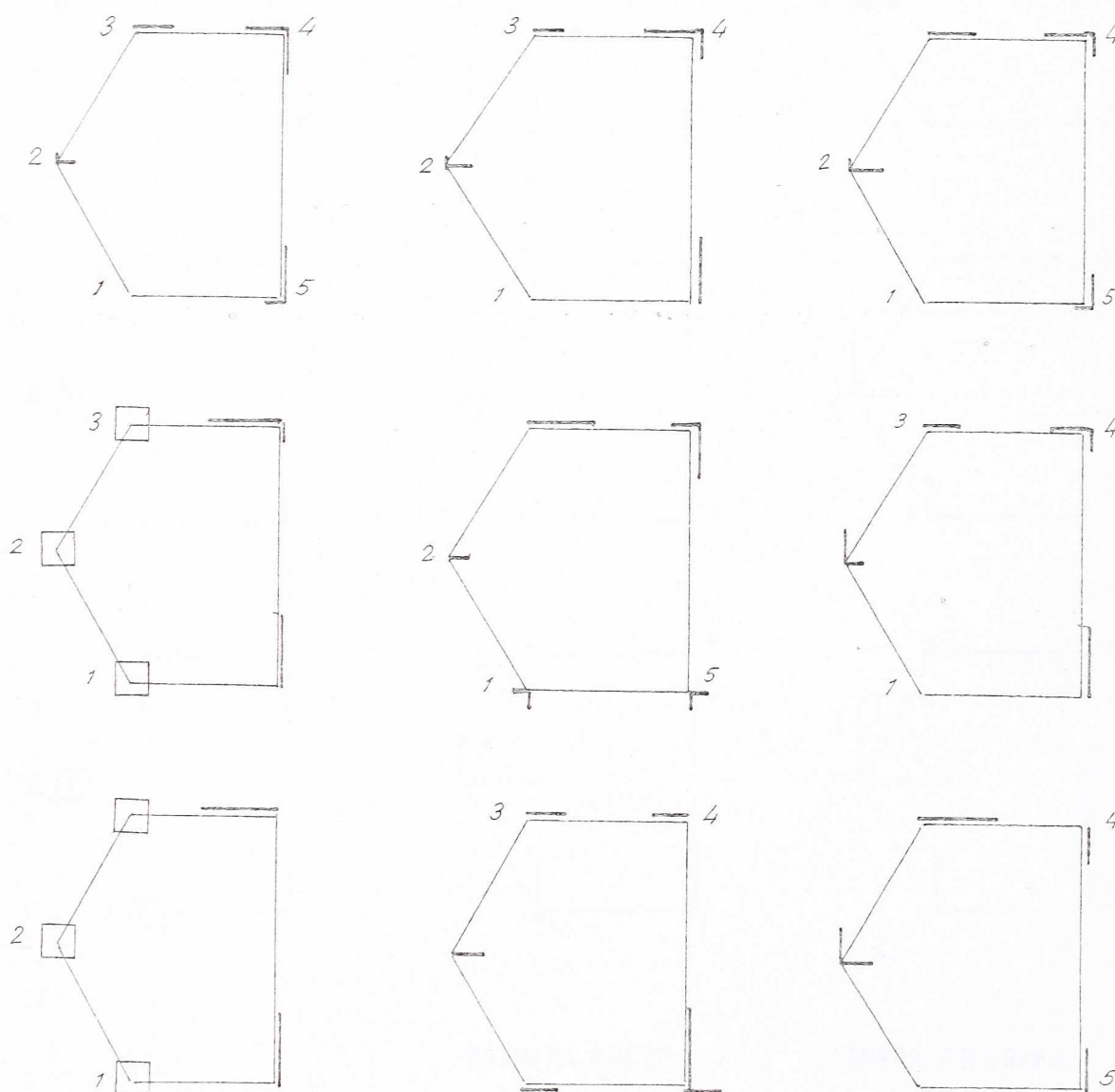
RAZMERA POMERANJA

5 cm

GDE SU OZNAČENE
BROJEM TAČKE UKLAPANJA
□ - STABILNE TAČKE

S1. 7.1.2

GRAFIČKI PRIKAZ POMERANJA TAČAKA IZVESNOG BROJA
KOMBINACIJA IZ TABELA 7.1.2 (MERENI SU UGLOVI I DUŽINE)



RAZMERA MREŽE

100 m

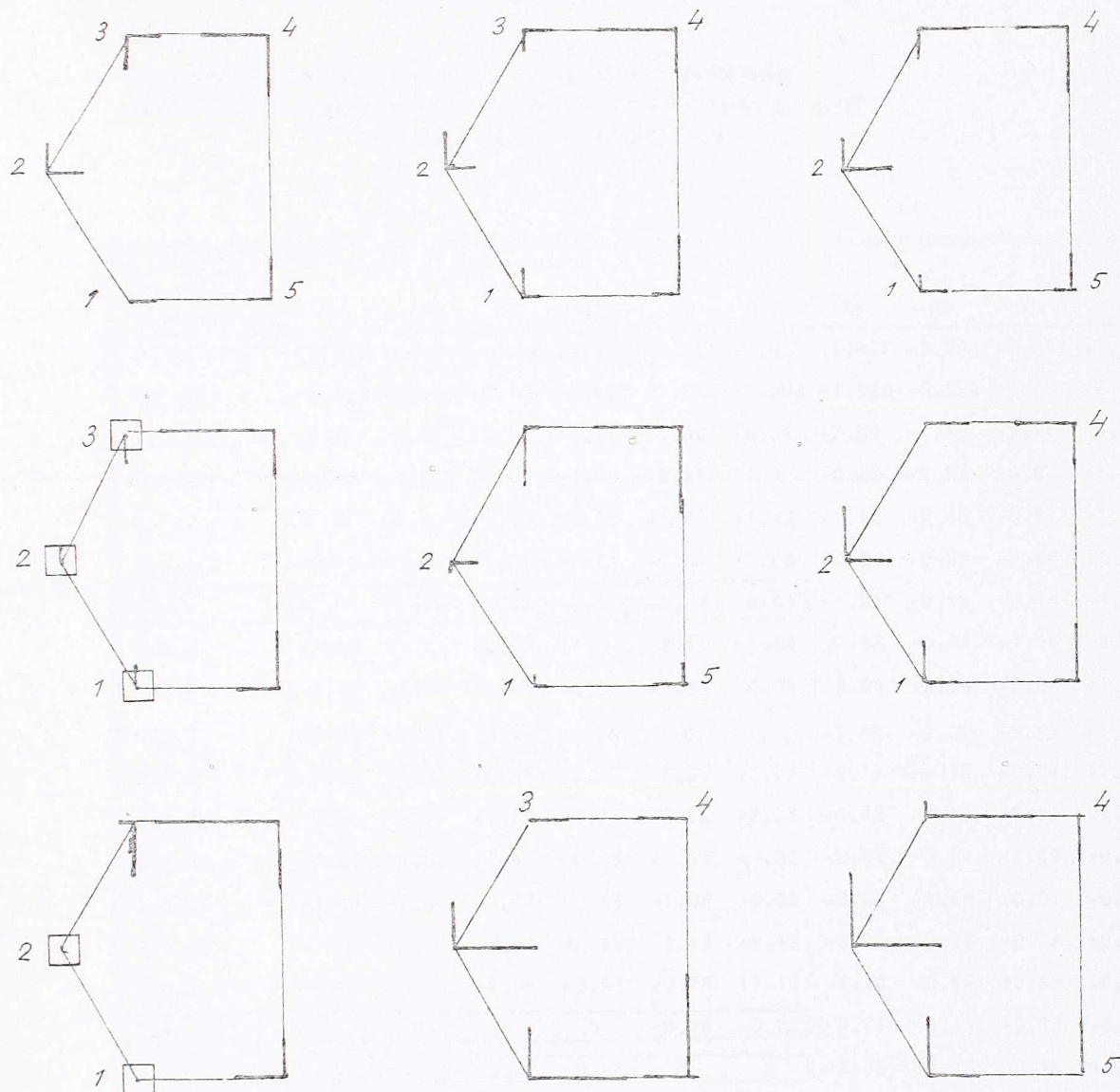
RAZMERA POMERANJA

5 cm

GDE SU OZNAČENE :
BROJEM TAČKE UKLAPANJA
□ — STABILNE TAČKE

S1. 7.1.3

GRAFIČKI PRIKAZ POMERANJA TAČAKA IZVESNOG BROJA
KOMBINACIJA IZ TABELA 7.1.3 (MERENI SU SAMO UGLOVI)



GDE SU OZNAČENE :
BROJEM TAČKE UKLAPANJA
□ STABILNE TAČKE

RAZMERA MREŽE

100 m

RAZMERA POMERANJA

5 mm

Sl. 7.1.4

TABELA 7.1.1

POMERANJA TAČAKA PO KOORDINATNIM OSAMA DODIJENA UKLAPANJEM MREŽE
 TRANSFORMACIJOM SLIČNOSTI U SVIM KOMBINACIJAMA TAČAKA - MERENI SU UGLOVI
 (POMERANJA SU DATA U SANTIMETRIMA)

TAČKA KOMBINACIJA	1		2		3		4		5	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx
1,2,3,4,5	-0,805	-1,932	-0,328	+0,392	+1,867	+0,916	-1,427	-0,784	+0,693	+1,458
1,2,3,4	-0,080	-1,372	+0,167	+0,432	+1,672	+1,008	-1,920	-0,006	+1,28	+2,69
1,2,3,5	-0,01	-1,79	-0,34	-0,11	+1,30	-0,01	-2,63	-1,45	-0,06	+1,91
1,2,4,5	-0,78	-1,57	+0,21	+1,19	+2,93	+1,47	-0,23	-0,86	+0,80	+1,24
1,3,4,5	-1,01	-1,91	-0,49	+0,59	+1,83	+1,13	-1,38	-0,66	+0,57	+1,44
2,3,4,5	-1,29	-3,17	-1,11	-0,21	+1,44	+0,86	-1,20	-0,88	+0,86	+0,23
1,2,3	+0,03	-0,04	-0,01	+0,09	-0,02	-0,05	-4,99	-0,18	-0,15	+4,97
1,2,4	+0,08	-1,13	+0,59	+1,17	+2,72	+1,64	-0,65	-0,04	+1,50	+2,33
1,2,5	-0,78	-1,57	+0,84	+0,56	+3,39	-0,03	-0,69	-2,59	-0,06	+1,01
1,3,4	+0,03	-1,07	+0,27	+0,70	+1,83	-1,13	-1,86	-0,06	+1,13	+1,287
1,3,5	-1,01	-1,91	-0,55	-0,18	+1,08	+0,04	-2,77	-1,33	-0,07	+1,87
1,4,5	-1,05	-0,83	+0,39	+2,23	+3,66	+2,27	+0,48	-0,60	+0,57	+1,44
2,3,4	+0,21	-3,57	-0,47	-0,85	+1,44	+0,86	-0,97	-0,01	+2,59	+0,70
2,3,5	-1,48	-2,91	-1,07	-0,58	+1,05	-0,02	-2,25	-1,64	+0,01	+0,61
2,4,5	-1,30	-2,61	-0,63	+0,63	+2,40	+1,43	-0,23	-0,86	+0,86	+0,23
3,4,5	-2,03	-3,81	-2,08	-0,40	+0,75	+1,10	-1,38	-0,66	+0,63	-0,43
1,2	0	0	0	0	-0,10	-0,25	-5,21	-0,35	-0,32	+5,04
1,3	0	0	-0,02	+0,15	0	0	-4,97	-0,16	-0,18	+4,98
1,4	0	0	+1,15	+2,34	+3,66	+2,27	0	0	+1,13	+2,87
1,5	0	0	+4,21	+2,80	+2,63	+0,30	+3,84	-4,84	0	0
2,3	+0,17	-0,21	0	0	0	0	-4,84	-0,06	+0,11	+4,87
2,4	+0,20	-3,01	0	0	+2,40	+1,43	0	0	+2,59	+0,70
2,5	-1,30	-2,61	0	0	+2,81	-0,07	-0,69	-2,59	0	0
3,4	+0,27	-8,61	-2,37	-4,23	0	0	0	0	+5,07	-3,46
3,5	-2,03	-3,81	-2,14	-1,17	0	0	-2,77	-1,33	0	0
4,5	-2,79	-2,22	-1,90	+1,89	+2,00	+2,92	0	0	0	0

(ZADATA SU POMERANJA: $\Delta y_d = -0,0 \text{ cm}$; $\Delta x_d = 0,0 \text{ cm}$)

TABELA 7.1.2

POMERANJA TAČAKA PO KOORDINATNIM OSAMA DOBIJENA UKLAPANJEM MREŽE
TRANSFORMACIJOM SLIČNOSTI U SVIM KOMBINACIJAMA TAČAKA - MERENI SU UGLOVI I DUŽINE
(POMERANJA SU DATA U SANTIMETRIMA)

TAKA	1		2		3		4		5	
KOMBINACIJA	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx	Δy	Δx
1,2,3,4,5	-0,24	-0,36	1,16	0,40	2,43	-0,70	-2,74	-2,41	-0,61	3,07
1,2,3,4	0,28	0,33	1,15	0,78	1,87	-0,01	-3,30	-1,09	-0,09	4,39
1,2,3,5	-0,75	-1,00	0,42	-0,37	1,46	-1,34	-3,71	-2,77	-1,12	2,70
1,2,4,5	-0,04	-0,30	1,91	0,77	3,72	-0,64	-1,45	-2,98	-0,41	2,50
1,3,4,5	-0,04	-0,21	1,45	0,60	2,81	-0,55	-2,36	-2,36	-0,41	3,12
2,3,4,5	-0,34	-0,44	1,10	0,34	2,30	-0,78	-2,78	-2,52	-0,71	2,96
1,2,3	0,00	0,12	0,05	0,10	-0,05	-0,22	-5,22	-0,35	-0,37	5,13
1,2,4	0,38	0,42	1,77	1,18	3,02	0,08	-2,15	-1,60	0,01	3,88
1,2,5	-0,59	-1,26	1,56	-0,06	3,57	-1,60	-1,60	-4,16	-0,96	1,32
1,3,4	0,53	0,63	1,49	1,13	2,32	0,29	-2,85	-0,91	0,16	4,57
1,3,5	-0,57	-1,14	0,54	-0,55	1,52	-1,48	-3,65	-2,85	-0,94	2,63
1,4,5	0,28	0,32	2,70	1,67	4,99	-0,02	-0,18	-2,90	-0,09	2,58
2,3,4	0,60	0,40	1,36	0,75	1,20	0,06	-3,27	-0,81	0,31	4,67
2,3,5	-1,16	-1,30	0,17	-0,58	1,36	-1,64	-3,81	-3,26	-1,53	2,22
2,4,5	-0,03	-0,42	1,89	0,64	3,67	-0,76	-1,50	-3,06	-0,40	2,42
3,4,5	-0,01	-0,31	1,45	0,48	2,77	-0,65	-2,40	-2,41	-0,36	3,06
1,2	-0,01	0,02	0,01	-0,02	-0,11	-0,32	-5,28	-0,43	-0,38	5,05
1,3	0,00	0,17	0,07	0,16	0,00	-0,17	-5,17	-0,33	-0,37	5,15
1,4	0,75	1,31	2,66	2,35	4,42	0,97	-0,75	-1,31	0,39	4,17
1,5	0,18	0,00	4,57	2,48	8,81	-0,34	3,64	-5,48	-0,18	0,00
2,3	0,10	0,20	0,08	0,14	-0,08	-0,14	-5,25	-0,19	-0,27	5,29
2,4	0,90	0,57	2,07	1,20	3,10	0,23	-2,07	-1,20	0,53	4,28
2,5	-0,88	-1,89	1,25	-0,72	3,23	-2,23	-1,94	-4,76	-1,25	0,72
3,4	2,86	0,34	2,79	0,25	2,58	0,00	-2,58	0,00	2,49	5,48
3,5	-0,23	-1,73	0,25	-1,16	1,20	-2,07	-3,97	-3,40	-1,20	2,07
4,5	0,37	0,53	2,84	1,91	5,17	0,19	0,00	-2,74	0,00	2,74

(ZADATA SU POMERANJA: $\Delta y = -5,0 \text{ cm}$; $\Delta x_5 = 5,0 \text{ cm}$)

TABELA 7.1.3

POMERANJA TAČAKA PO KOORDINATNIM OSAMA DOBIJENA UKLAPANJEM MREŽE
 TRANSFORMACIJOM SLIČNOSTI U SVIM KOMBINACIJAMA TAČAKA - MERENI SU UGLOVI
 (POMERANJA SU DATA U SANTIMETRIMA)

TAČAKA KOMBINACIJA	1		2		3		4		5	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx
1,2,3,4,5	0,16	0,15	0,27	0,17	0,25	-0,20	-0,50	-0,41	-0,17	0,29
1,2,3,4	0,13	0,22	0,23	0,23	0,19	-0,13	-0,56	-0,32	-0,20	0,38
1,2,3,5	0,07	0,04	0,13	0,03	0,06	-0,31	-0,69	-0,46	-0,26	0,24
1,2,4,5	0,18	0,12	0,35	0,16	0,37	-0,23	-0,38	-0,49	-0,15	0,21
1,3,4,5	0,19	0,21	0,34	0,25	0,35	-0,14	-0,40	-0,39	-0,14	0,31
2,3,4,5	0,23	0,18	0,32	0,18	0,27	-0,17	-0,48	-0,35	-0,10	0,35
1,2,3	0,01	0,13	0,05	0,10	-0,05	-0,22	-0,80	-0,35	-0,32	0,35
1,2,4	0,15	0,19	0,30	0,22	0,30	-0,16	-0,45	-0,41	-0,18	0,29
1,2,5	0,08	-0,06	0,17	-0,06	0,11	-0,41	-0,64	-0,58	-0,25	0,12
1,3,4	0,16	0,31	0,30	0,34	0,30	-0,04	-0,45	-0,28	-0,17	0,42
1,3,5	0,10	0,06	0,19	0,06	0,13	-0,29	-0,62	-0,47	-0,23	0,23
1,4,5	0,24	0,25	0,49	0,35	0,61	-0,10	-0,14	-0,47	-0,09	0,23
2,3,4	0,32	0,28	0,33	0,24	0,21	-0,07	-0,54	-0,17	-0,01	0,53
2,3,5	0,11	0,05	0,16	0,03	0,07	-0,30	-0,68	-0,43	-0,22	0,27
2,4,5	0,27	0,15	0,41	0,17	0,40	-0,20	-0,35	-0,44	-0,06	0,26
3,4,5	0,28	0,27	0,41	0,29	0,40	-0,08	-0,35	-0,31	-0,05	0,39
1,2	-0,01	0,02	0,01	-0,02	-0,11	-0,33	-0,86	-0,44	-0,34	0,26
1,3	0,00	0,18	0,07	0,17	0,00	-0,17	-0,75	-0,33	-0,33	0,36
1,4	0,20	0,35	0,45	0,44	0,55	0,00	-0,20	-0,35	-0,13	0,35
1,5	0,16	0,00	0,40	0,09	0,49	-0,35	-0,26	-0,70	-0,16	0,00
2,3	0,11	0,21	0,08	0,14	-0,08	-0,14	-0,83	-0,19	-0,22	0,51
2,4	0,36	0,26	0,42	0,24	0,33	-0,09	-0,42	-0,24	0,03	0,46
2,5	0,14	-0,09	0,19	-0,11	0,11	-0,44	-0,64	-0,59	-0,19	0,11
3,4	0,65	0,35	0,58	0,26	0,37	0,00	0,37	0,00	0,32	0,70
3,5	0,17	0,08	0,24	0,06	0,16	-0,27	-0,59	-0,43	-0,16	0,27
4,5	0,33	0,40	0,61	0,51	0,75	0,05	0,00	-0,35	0,00	0,35

(ZADATA SU POMERANJA: $\Delta y_4 = -0.6 \text{ cm}$; $\Delta x_5 = 0.2 \text{ cm}$)

TABELA 7.1.4

TEST SA UGLOVIMA I DUZINAMA - MERENE SU DUZINE I UGLOVI
 (ZADATA SU POMERANJA: $\Delta y_2 = -5,0 \text{ cm}$; $\Delta x_6 = 5,0 \text{ cm}$)

TAČKA KOMBINACIJA	1	2	3	4	5	TEST VELICINA χ^2	KVANTIL $\chi^2_{1-\alpha}$
1,2,3,4,5						2765,50	2,58
1,2,3,4							
1,2,3,5							2,77
1,2,4,5							
1,3,4,5						935,70	
2,3,4,5						1,29	
1,2,3	*	*	*			412,44	
1,2,4						1510,70	
1,2,5						690,33	
1,3,4						2009,69	
1,3,5						1641,78	3,16
1,4,5						1290,29	
2,3,4						603,45	
2,3,5						287,90	
2,4,5						634,11	
3,4,5						0,321	
1,2	*	*				1,259	
1,3	*		*			9,148	
1,4						1,800	
1,5	*				*	1,610	2,10
2,3		*	*			15,439	
2,4						10,695	
2,5						27,263	
3,4						14,500	
3,5						18,895	
4,5							

TABELA 7.1.5

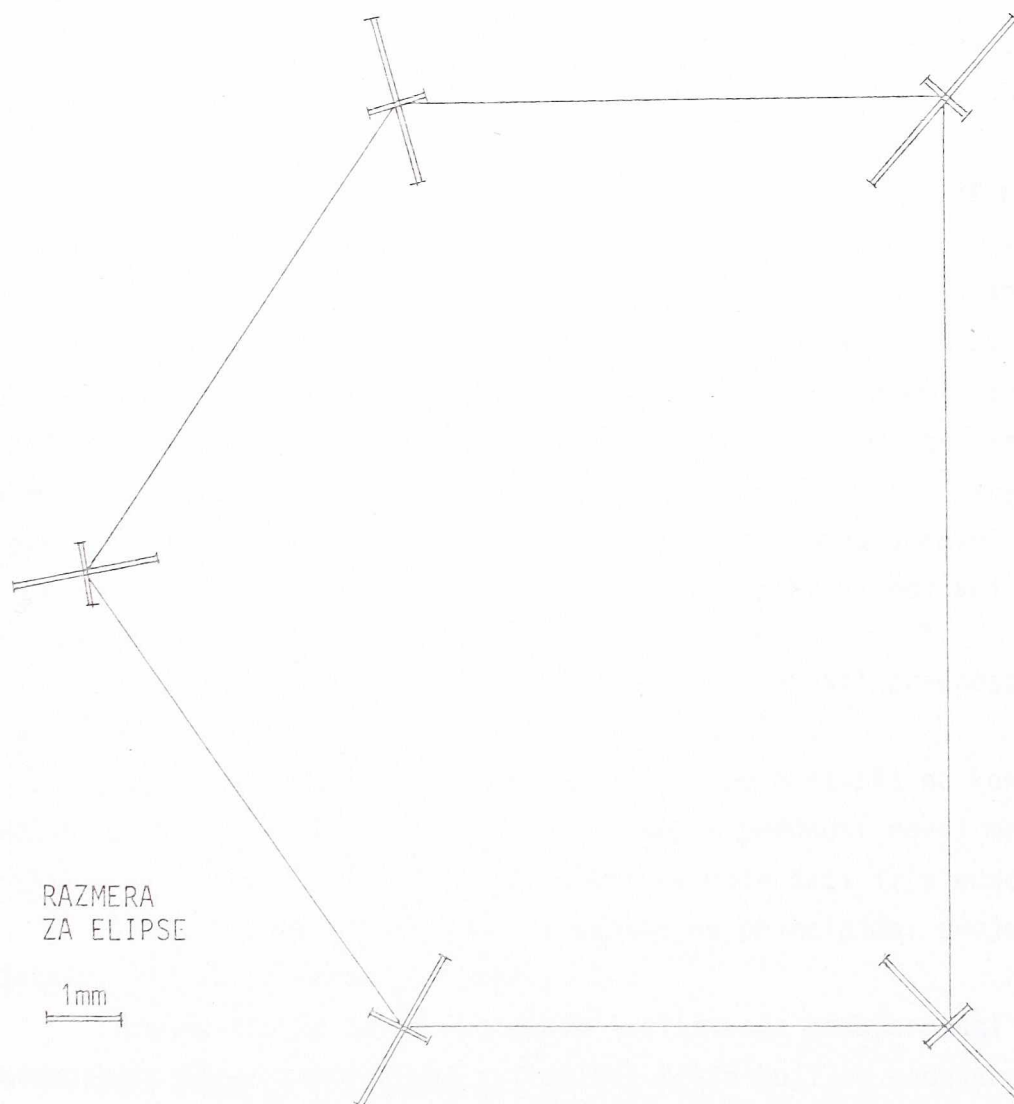
TEST SA UGLOVIMA I DUZINAMA - MERENE SU DUZINE I UGLOVI

(ZADATA SU POMERANJA: $\Delta x_1 = -0.2$ cm; $\Delta x_2 = 0.2$ cm)

TACKA KOMBINACIJA	1	2	3	4	5	TEST VELICINA T	KVANTIL $F_{1-\alpha}$
1,2,3,4,5						10,657	2,58
1,2,3,4						11,00	
1,2,3,5						3,59	
1,2,4,5						33,47	
1,3,4,5						14,20	2,77
2,3,4,5						7,74	
1,2,3	*	*	*			1,36	
1,2,4						30,60	
1,2,5						5,65	
1,3,4						11,43	
1,3,5						4,14	3,16
1,4,5	*			*	*	2,61	
2,3,4						40,62	
2,3,5		*	*		*	2,09	
2,4,5						7,87	
3,4,5						12,76	
1,2	*	*				0,32	
1,3	*		*			1,30	
1,4						2,52	
1,5	*				*	1,60	
2,3		*	*			1,61	
2,4						3,23	2,10
2,5		*			*	1,63	
3,4						4,11	
3,5			*		*	1,96	
4,5						2,50	

PRIKAZ UNUTRAŠNJE TAČNOSTI TEST MREŽE

Tačka	Standardne greške koordinata		Parametri srednje elipse grešaka		
	$\sigma_y (mm)$	$\sigma_x (mm)$	$\theta (^\circ)$	$A (mm)$	$B (mm)$
1	0,6	0,9	28,1	1,1	0,4
2	0,9	0,4	77,3	1,0	0,4
3	0,5	1,1	164,3	1,1	0,4
4	0,9	1,1	40,5	1,4	0,3
5	0,9	1,0	138,0	1,3	0,3



Sl. 7.1.5. Srednje elipse grešaka

Z A K L J U Č A K

Da bi jedna kontrolna mreža mogla poslužiti za jednu valjanu analizu geodetskih deformacionih merenja neophodno je da budu zadovoljene prethodne pretpostavke kao što su:

- optimalna geometrija i pouzdanost mreže,
- optimalna tačnost merenja elementarnih veličina,
- pravilan izbor test veličina za kontrolu kvaliteta merenja,
- pravilan izbor mesta za tačke mreže s obzirom na geološke osobine tla,
- ispravna stabilizacija; i druge.

Drugim rečima od geodetske kontrolne mreže zahteva se da bude tako protjektovana da se pomeranja i deformacije (objekta i tla) mogu odrediti sa unapred zadatom tačnošću i pouzdanošću.

Pri zadovoljenju nabrojanih pretpostavki količnik maksimalne i minimalne sopstvene vrednosti matrice normalnih jednačina biće vrlo blizak jedinici, u kom slučaju će razmatrane metode utvrđivanja stabilnih tačaka davati bolje rezultate nego u slučaju kada te pretpostavke nisu zadovoljene. Medjutim, nabrojane pretpostavke, često puta je veoma teško ostvariti, pa će se količnik maksimalne i minimalne sopstvene vrednosti znatno razlikovati od jedinice. U tom slučaju, pri optimalnom projektovanju mreže, treba nastojati da pravci bitnih sopstvenih vektora, po mogućstvu, budu upravni na očekivani pravac vektora deformacija. Nezadovoljenje ovog zahteva povlači slabu moć otkrivanja intenziteta vektora pomeranja.

Na osnovu dosadašnjih saznanja ne može se dati prednost nijednom od pet prikazanih postupaka.

Uporedjenjem poznatih postupaka i novog postupka na konkretnim primerima došlo se do saznanja da se može dati izvesna prednost novoj metodi analize geodetskih deformacionih merenja. Prednost se može dati iz sledećih razloga:

Prvo, što je nova metoda izradjena na principima: projektni zadatak, projekat, realizacija prema projektu;

Drugo, što se novim postupkom ispitivanja podudarnosti mreže u svim kombinacijama sigurno pronalaze svi delovi mreže koji su podudarni izmedju dve epohe i vrši uspešno lokalizacija stabilnih tačaka;

Treće, nov postupak ispitivanja podudarnosti mreže odn. utvrđivanja stabilnih tačaka na konkretnim primerima skoro u svim slučajevima daje veću relativnu moć testova, odnosno daje najbolje ocene vektora pomeranja;

četrto, principi novog postupka obezbeđuju neophodne informacije i uslove za pouzdano odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla;

Peto, kada je nastupio rascep u mreži nov postupak sigurno otkriva podudarne delove mreže a korišćenjem dodatnih informacija koje se dobijaju kroz realizaciju projekta uspešno pronalazi stabilne tačke;

Šesto, testiranjem merenih elementarnih veličina prema uslovima datim u projektu merenja su oslobođena grubih grešaka.

Medjutim, kada koriste dodatne informacije i poznate metode (glava 4) otkrivaju grupe podudarnih tačaka sa više ili manje uspeha, što zavisi od toga koliko su pouzdane te dodatne informacije.

Pod dodatnim informacijama koje uspešno obezbeđuje nov način analize geodetskih deformacionih merenja podrazumeva se: poznavanje pravca mogućih pomeranja tačaka, geološke stabilnosti tla, proračunati međjusobni uticaji objekta i tla, dodatna merenja i drugo.

L I T E R A T U R A

1. ASHKENAZI, V. and GRAFAREND, W. 1975.: NETWORK ANALYSIS. PRIMER CONGRESO VENEZOLANO DE GEODEZIJA, MAKARAIBO.
2. ASHKENAZI, V. 1982.: SETING-OUT AND DEFORMATION MEASUREMENTS FOR A NUCLEAR ACCELERATOR. III FIG SIMPOSIUM ON THE STUDY OF MOVEMENTS IN ENGINEERING SURVEYS. BUDAPEST.
3. AŠANIN, S. 1977. PRORAČUNI I ANALIZE UTICAJA BROJA VRSTE I TAČNOSTI MERENIH ELEMENTARNIH VELIČINA NA TAČNOST IZLAZNIH ELEMENATA JEDNE SAMOSTALNE TRIANGULACIJE ZA OBELEŽAVANJE TUNELA. MAGISTARSKI RAD, BEOGRAD.
4. AŠANIN, S. 1985.: ANALIZA GEODETSKIH DEFORMACIONIH MERENJA U HIDROGRADNJI. SAVETOVANJE SPLIT.
5. BAARDA, W. and ALBERTA, J.E. 1962: THE CONNECTION OF GEODETIC ADJUSTEMENT PROCEDURES WITH METHODS OF MATHEMATICAL STATISTICS BULLTEIN GEODESIQUE - 66.
6. BAARDA, W. 1968^a. A COMPAS FOR THE LAND SURVEYOR. XII INT CONGRESS OF SURVEYORS, B, LONDON.
7. BAARDA, W. 1977.: MEASURES FOR THE ACCURACY OF GEODETIC NETWORKS. SIMPOSIUM ON OPTIMIZATION AND COMPUTATION OF CONTROL NETWORKS, SOPROON/HUNGARY.
8. BÄHR, H.G. 1982.: EINE VERALLGEMEINERTE LÖSUNG FÜR DIE ÜBERBESTIMMTEN KOORDINATEN TRANSFORMATION ZWISCHEN AUSGEGLICHENEN GEODÄTISCHEN NETZEN. ZFV HEFT 5, (107), s.173-182.
9. BEGOVIĆ, A. 1973.: PRILOG IZUČAVANJU PRIMENE GEODETSKIH MERENJA KOD ISPITIVANJA POMERANJA TLA I DEFORMACIJA GRADJEVINA. DOKTORSKA DISERTACIJA, GEODETSKI FAKULTET, ZAGREB.
10. BEGOVIĆ, A., SMILJKOVIĆ, D., AŠANIN, S. 1983.: STUDIJA O ISPITIVANJU STABILNOSTI REPERA DELA NIVELMANSKE MREŽE I TAČAKA TRIGONOMETRIJSKE MREŽE PODRUČJA SLEGANJA U GRADU TUZLI ZA PERIOD 1956-1983. GRADJEVINSKI FAKULTET BEOGRAD.
11. CASPARY, W. 1982.: SOME ASPECTS CONCERNING THE DATUM OF GEODETIC NETWORKS FOR DEFORMATION ANALYSES. III INT. SIMPOSIUM ON DEFORMATION MEASUREMENT BY GEODETIC METHODS, BUDAPEST.
12. CASPARY W, et all. 1983. DEFORMATIONSANALYSEN '83 BEITRAGE ZUM GEODÄTISCHEN SEMINAR MÜNCHEN.

13. CHEN, Y.Q. AND ALL. 1983.: DESIGN CONSIDERATIONS IN DEFORMATION MONITORING. FIG XVII INTERNATIONAL CONGRESS, SOFIA.
14. CHRZANOWSKI, A. and other. 1978.: MICRO-GEODETIC NETWORKS IN MONITORING TECTONIC MOVEMENTS. II. INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON DEFORMATION MEASUREMENTS BY GEODETIC METHODS (FIG) BON.
15. CHRZANOVSKI, A and all. 1981.: A COMPARISON OF DIFFERENT APPROACHES INTO THE ANALYSIS OF DEFORMATION MEASUREMENTS. FIG. XVI INTERNATIONAL CONGRESS, MONTREAUX.
16. CHRZANOVSKI, A and all. 1982^a.: REPORT OF THE FIG-WORKING GROUP ON THE ANALYSIS OF DEFORMATIONS MEASUREMENTS. III INT. SIMPOSIUM ON DEFORMATION MEASUREMENTS BY GEODETIC METHOD, BUDAPEST.
17. CHRZANOVSKI, A. and all. 1982^b.: A GENERALISED APPROACH TO THE GEOMETRICAL ANALYSIS OF DEFORMATION SURVEYS. III INT. SIMPOSIUM ON DEFORMATION MEASUREMENT BY GEODETIC METHODS. BUDAMPEST.
18. CHRZANOVSKI, A. and all. 1983^a. : USE OF THE FINITE ELEMENT METHOD IN THE DESIGN AND ANALYSIS OF DEFORMATION MEASUREMENT. FIG XVII INTERNATIONAL CONGRESS, SOFIA
19. CHRZANOVSKI, A. and all. 1983^b. : REPORT OF THE AD HOC COMMITTEE ON THE ANALYSIS OF DEFORMATION SURVEYS. FIG XVII INTERNATIONAL CONGRESS, SOFIA.
20. DARE, P.J. 1983.: STRENGTH ANALYSIS OF HORIZONTAL NETWORKS USING STRAIN. TECHNICAL REPORT No. 2, UNIVERSITY TORONTO.
21. DUPRAZ, H., NEIMEIER, W. 1979^a.: UN CRITERE POUR L'ANALISE DES RESEAUX GEODESIQUES DE CONTROLE. MENSURATION, PHOTOGRAMMETRIE, GENIE RURAL.
22. DUPRAZ, H., NEIMEIER, W: 1979^b.: ANALYSE VON DEFORMATIONEN MESSUNGEN DURCH KLAFUNGSZERLEGUNG. SCHRIFTENREIHE DER HOCHSCHULE DER BUNDESWEHR HEFT 4.
23. HALD, A. 1957.: STATISTICAL THEORY WITH ENGINEERING APPLICATIONS. NEW-YORK-LONDON.
24. HAMILTON, W.C. 1964.: STATISTICS IN PHYSICAL SCIENCE. ROLAND PRESS. COMP., NEW YORK.
25. HECK, B. 1977. DEFORMATIONENANALYSE MITTELS RELATIVER FEHLERELLIPSEN. AVN 3.
26. HECK, B. 1978.: DIE VERWENDUNG RELATIVER FEHLERELLIPSEN ZUR ANALYSE VON DEFORMATIONENMESSUNGEN. II. INTERNATIONALES SYMPOSIUM UBER DEFORMATIONEN - MESSUNGEN MIT GEODATISCHEN METHODEN, BONN
27. HECK, B. 1983.: DAS ANALYSEVERFAHREN DES GEODATISCHEN INSTITUT DER UNIVERSITAT KARLSRUHE STAND 1983, DEFORMATIONENANALYSEN '83 MUNCHEN.

28. HOPKE, W. 1978.: ZUSAMMENFÜHRUNG VERSCHIEDENER KONZEPTE ZUR AUSGLEICHUNG FREIER NETZE. VISSSENSCHAFTLICHE ARBEITEN DER LEHRSTUJLE FÜR GEODÄSIE HANNOVER No 83.
29. IVANOVIĆ, B. 1973.: TEORIJSKA STATISTIKA. NAUČNA KNJIGA, BEOGRAD.
30. KOCH, K.R. 1975.: WAHRSCHEINLICHKEITSVERTEILUNGEN FÜR STATISTISCHE BEURTEILUNGEN VON AUSGLEICHUNGSERGEBNISSEN, BON.
31. KOCH, K.R. 1975.: HERLEITUNG DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE MIT HILFE GENERALISIRTER MATRIXINVERSEN. ZfV, Nr.12.
32. KOCH, K.R. 1978.: HYPOTHESENTESTS BEI SINGULAREN AUSGLEICHUNGSPROBLEMEN. ZfV, Nr.1.
33. KOCH, K.R. 1980.: PARAMETERSCHÄTZUNG UND HYPOTHESENTESTS MIT LINEAREN MODELEN. DÜMLER, BONN.
34. KUNTZ, E., SCHMITT, G. 1979.: "SEMINAR ÜBER DEFORMATIONS ANALYSEN" SCHRIFTENREIHE DER HOCHSCHULE DER BUNDESWEHR HEFT 4.
35. KRÜGER, J. 1979.: NUMERISCHE BEHANDLUNG VON DATUMS UND KONFIGURATIONS-DEFEKTE. KONTAKTSTUDIUM GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES-UND INGENIEUR-VERMESSUNG", UNIVERSITÄT HANNOVER.
36. LAZARINI, T. 1974.: DETERMINATION OF DISPLACEMENTS AND DEFORMATION OF STRUCTURES AND THEIR ENVIRONMENT. UNIVERSITY OF NEW BRUNSWICK.
37. MIHAILOVIĆ, K. 1984.: TRANSFORMACIJA KOORDINATA IZ JEDNOG U DRUGI KOORDINATNI SISTEM. ZBORNIK INSTITUTA ZA GEODEZIJU BEOGRAD.
38. MIHAILOVIĆ, K. 1985^a: NOV PRISTUP PRI OTKRIVANJU STABILNIH TAČAKA KOD DEFORMACIONIH MERENJA, ZBORNIK INSTITUTA ZA GEODEZIJU, BEOGRAD.
39. MIHAILOVIĆ, K. 1985^b: KRITIČKI OSVRT NA METODOLOGIJU UTVRĐIVANJA STABILNIH TAČAKA KOD DEFORMACIONIH MERENJA, BEOGRAD.
40. MIHAILOVIĆ, K. 1985^c: ODREĐIVANJE STABILNIH REPERA. GEODETSKA SLUŽBA BR. 43. BEOGRAD
41. MIHAILOVIĆ, K. 1985^d: IDENTIFIKOVANJE STABILNIH TAČAKA NA OSNOVU ROTACIJE KOORDINATNOG SISTEMA. GEODETSKA SLUŽBA BR. 43. BEOGRAD.
42. MIHAILOVIĆ, K., BEGOVIĆ, A., PEROVIĆ, G., NINKOV, T., AŠANIN, S. 1985^e: METODOLOGIJA UTVRĐIVANJA STABILNIH TAČAKA PRI DEFORMACIONIM MERENJIMA XYZ. INSTITUT ZA GEODEZIJU - GRADJEVINSKI FAKULTET.
43. МИЛЕВ, Г. 1978.: СЪВРЕМЕНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДОВАНИЕ НА ДЕФОРМАЦИИ. ТЕХНИКА, СОФИЯ.

44. NIEMEIER, W. 1976.: GRUNDRINZIP UND RECHENFORMELN EINER STRENGEN ANALYSE GEODÄTISCHER DEFORMATIONSMESSUNGEN. VII. INTERNATIONALER KURS FÜR INGENIEURMESSUNGEN HOHER PRÄZISION, DARMSTADT.
45. NIEMEIER, W. 1977.: ANSÄTZE ZUR INTERPRETATION DER ERGEBNISSE GEODÄTISCHER DEFORMATIONSMESSUNGEN. WISSENSCHAFTLICHE ARBEITEN DER LEHRSTUHL FÜR GEODÄSIE, PHOTOGRAMMETRIE UND KARTOGRAPHIE AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT HANNOVER, Nr. 76.
46. NIEMEIER, W. 1979^a.: FUNKTIONALES UND STOCHASTISCHES MODELL FÜR LAGE-, HÖHEN - UND SCHWERENETZE. KONTAKTSTUDIUM "GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES- UND INGENIEURMESSUNG", UNIVERSITÄT HANNOVER.
47. NIEMEIER, W. 1979^b.: HYPOTHESENTESTS IN GEODÄTISCHEN NETZEN. KONTAKTSTUDIUM "GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES - UND INGENIEURMESSUNG", UNIVERSITÄT HANNOVER.
48. NIEMEIER, W. 1979^c.: KONGRUENZPRÜFUNG IN GEODÄTISCHEN NETZEN. KONTAKTSTUDIUM "GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES - UND INGENIEURMESSUNG", UNIVERSITÄT HANNOVER.
49. NIEMEIER, W. 1982.: ZUR GENERALISIERUNG GEMESSENER DEFORMATIONEN MIT STATISTISCHEN METHODEN, HANNOVER.
50. NINKOV, T. 1985. DEFORMACIONA ANALIZA I NJENA PRAKTIČNA PRIMENA. GEODETSKI LIST 7-9, ZAGREB.
51. NINKOV, T. 1985.: NEKI PROBLEMI POUZDANOG ODREĐJIVANJA DEFORMACIJA GRADJEVINSKIH OBJEKATA GEODETSKIM METODAMA. SAVETOVANJE SPLIT.
52. PELZER, H. 1971.: ZUR ANALYSE GEODÄTISCHER DEFORMATIONSMESSUNGEN. DGK, REIHE C, Nr. 164, MÜNCHEN.
53. PELZER, H. 1976^a. ZUR ANALYSE VON PERMANENT REGISTRIERTEN DEFORMATIONEN. VII. INTERNATIONALER KURS FÜR INGENIEURMESSUNGEN HOHER PRÄZISION, DARMSTADT.
54. PELZER, H. 1974.: NEUERE ERGEBNISSE BEI DER STATISTISCHEN ANALYSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN. XIV INTERNATIONALER KONGRESS DER VERMESSUNGS INGENIEURE, WASHINGTON, PAPERS 608.3.
55. PELZER, H. 1976^b.: ÜBER DIE STATISTISCHEN EIGENSCHAFTEN DER ERGEBNISSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN. INTERNATIONALER KURS FÜR INGENIEURMESSUNGEN HOHER PRÄZISION, BEITRÄGE, DARMSTADT.
56. PELZER, H. 1977.: CRITERIA FOR THE RELIABILITY OF GEODETIC NETWORKS. SIMPOSIUM ON OPTIMIZATION AND COMPUTATION OF CONTROL NETWORKS SOPRON/ HUNGARY.

57. PELZER, H. 1979^a. BEURTEILUNG DER GENAUIGKEIT UND DER ZUVERLÄSSIGKEIT GEODÄTISCHER NETZE. "KONTAKTSTUDIUM GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES - UND INGENIEURVERMESSUNG", HANNOVER.
58. PELZER, H. 1979^b. FEHLERLEHRE UND MATHEMATISCHE STATISTIK. KONTAKT STUDIUM "GEODÄTISCHE NETZE IN LANDES - UND INGENIEURVERMESSUNG" UNIVERSITÄT HANNOVER.
59. PELZER, H. 1980.: SOME CRITERIA FOR THE ACCURACY AND THE RELIABILITY OF NETWORKS. DGK REIHE B, HEFT Nr. 252, s. 55-67, MÜNCHEN.
60. PELZER, H. ZUR BEURTEILUNG DER GÜTE GEODÄTISCHER ÜBERWACHUNGNETZE. HANNOVER.
61. PEROVIĆ, G. 1980. GREŠKE POLOŽAJA. DOKTORSKI RAD, BEOGRAD.
62. PEROVIĆ, G. 1984.: RAČUN IZRAVNANJA KNJIGA I TEORIJA GREŠAKA MERENJA. NAUČNA KNJIGA, BEOGRAD.
63. PEROVIĆ, G., AŠANIN, S. 1985^a.: OPTIMALNO PROJEKTOVANJE GRADSKIH POLIGONOMETRIJSKIH MREŽA. INSTITUT ZA GEODEZIJU.
64. PEROVIĆ, G. 1985^b.: TESTIVE HIPOTEZE U DEFORMACIONOJ ANALIZI. SAVETOVANJE SPLIT.
65. PEROVIĆ, G. 1986.: SINGULARNA IZRAVNANJA (KNJIGA U RUKOPISU) BEOGRAD.
66. RAO, G.R, and MITRA, S.K. 1971.: GENERALIZED INVERSE OF MATRICES AND ITS APPLICATIONS. JOHN WILY, NEW YORK.
67. SEKULOVIĆ, M. 1984.: METOD KONAČNIH ELEMENATA, GRADJEVINSKA KNJIGA, BEOGRAD.
68. СИРЛ, С. и ГОСМАН. У. 1984.Ъ МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА В ЭКОНОМИКЕ. СТАТИСТИКА МОСКВА /ПЕР. С АНГЛ./.
69. SMILJKOVIĆ, D., AŠANIN, S. 1981.: ODREĐIVANJE DEFORMACIJA ČEONIH ZIDOVA MOSTA PREKO REKE DRINE U VIŠEGRADU. SAVETOVANJE KRK.
70. van MIERLO, J. 1977: A TESTING PROCEDURE FOR ANALYSING GEODETIC DEFORMATION MEASUREMENTS. II INTERNATIONALES SYMPOSIUM ÜBER DEFORMATIONSMESSUNGEN MIT GEODÄTISCHEN METHODEN, BONN.
71. van MIERLO, J. 1977. SYSTEMATIC INVESTIGATION ON THE STABILITY OF CONTROL POINTS. XV INTERNATIONAL CONGRES OF SURVEYORS, STOCKHOLM.
72. van MIERLO, J. 1980.: FREE NETWORK ADJUSTMENT AND S-TRANSFORMATIONS. DGK, PEINE B, HEFT Nr. 252. MÜNCHEN.

73. WELLS, D.E and KRAKIWSKY, E.J. 1971.: THE METHOD OF LEAST SQUARES.
UNIVERSITY OF NEW BRUNSWICK, FREDERICTON.
74. WELSCH, W. 1978.: ENTWICKLUNG DER ANALYSE VON DEFORMATIONSMESSUNGEN MIT
HILFE GEODÄTISCHER NETZE. II. INTERNATIONALES SYMPOSIUM ÜBER DEFORMATIONS-
MESSUNGEN MIT GEODÄTISCHEN METHODEN, BONN.
75. WELSCH, W.M. 1982^b.: ZUR BESCHREIBUNG HOMOGENER STRAINS ODER EINIGE BETRA-
CHTUNGEN ZUR AFFINEN TRANSFORMATION, ZfV 107, 5, s 173-182.
76. WELSCH, W.M. 1981.: DESCRIPTION OF HOMOGENEOUS HORIZONTAL STRAINS AND SOME
REMARKS TO THEIR ANALYSIS. DGK, REIHE B, HEFT Nr. 258/V MUNICH.
77. WELSCH, W.M. 1982^a.: EINIGE ERWEITERUNGEN DER DEFORMATIONSERMITTLUNG IN
GEODÄTISCHEN NETZEN DURCH METHODEN DER STRAINANALYSE. FIG III INT.
SYMPOSIUM ÜBER DEFORMATIONS MESSUNGEN MIT GEODET. METHODEN, BUDAMPEST.
78. WELSCH, W.M. 1979.: SEMINAR ÜBER DEFORMATIONSANALYSEN. SCHRIFTENREIHE DER
HOCHSCHULE DER BUNDESWEHR.
79. WELSCH, W.M. 1983.: ON THE CAPABILITY OF FINITE ELEMENT STRAIN ANALYSIS
AS APPLIED TO DEFORMATION INVESTIGATIONS. FIG XVII INT. CONGRESS,
SOFIA 1983.
80. WILLIAMS, N. and LUCAS, W.M. 1978.: STRUCTURAL ANALYSIS FOR ENGINEERS
INTERNATIONAL STUDENT EDITION.
81. WOLF, H. 1966.: DIE GENAUIGKEIT DER FÜR EINE HELMERT - TRANSFORMATION
BERECHNETEN KONSTANTEN. ZfV, Nr. 2.
82. WOLF, H. 1972.: HELMERTS LÖSUNG ZUM PROBLEM DER FREIEN NETZE MIT SINGULÄRER
NORMALGLEICHUNGSMATRIX. ZfV, Nr.5.
83. WOLF, H. 1973.: DIE HELMERT - INVERSE BEI FREIEN GEODÄTISCHEN NETZEN.
ZfV, Nr.9.
84. WOLF, H. 1979.: SINGULÄRE KOVARIANZEN IM GAUß - MODELL. SONDERDRUCK AUS DER
ZfV. Nr.10.
85. ZEREMSKI, P. : HELMERTOVA TRANSFORMACIJA (RUKOPIS)
86. ZEREMSKI, P. 1977.: KRITIČKI OSVRT NA MERE TAČNOSTI GEODETSKIH MREŽA.
MAGISTARSKI RAD, BEOGRAD.

ZNAČAJNIJI STRUČNI RADOVI AUTORA

87. AŠANIN, S. 1977.: Ispitivanje deformacije kamenog mosta Mehmed paše Sokolovića, Elaborat, Institut za geodeziju, Beograd (prof. Begović),
88. AŠANIN, S. 1978.: Ispitivanje sleganja konstrukcije i bazena na sportskom centru "11 april" u Beogradu. Jugoprojekt, Beograd (prof. Begović).
89. AŠANIN, S. 1979.: Odredjivanje pomeranja i deformacija zaštitnog zida dijafragmi na objektu glavna željeznička stanica "Prokop" u Beogradu, Elaborat, Institut za geodeziju, Beograd. (prof. Begović).
90. AŠANIN, S. 1979-1986.: Obrada i analiza podataka (20 serija merenja) za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta "Beška". Elaborat, Jaroslav Černi, Beograd.
91. AŠANIN, S. 1981-1982.: Obrada i analiza pomeranja klizišta VINČA I GROCKA, Jugoprojekt, Beograd.
92. AŠANIN, S. 1982-1986.: Merenje i obrada i analiza pomeranja objekta "Lunovo Selo". Institut za geodeziju, Beograd. (prof. Begović).
93. AŠANIN, S. 1983-1985.: Obrada i analiza pomeranja hale za mlevenje rude i ostalih objekata flotacije u Majdanpeku, Institut za geodeziju Beograd, (prof. Begović).
94. AŠANIN, S. 1983-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacija brane Gruža, Jaroslav Černi, Beograd.
95. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacije brane Vrutci, Jaroslav Černi, Beograd.
96. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja deformacija brane Mavrovo, Jaroslav Černi, Beograd.
97. AŠANIN, S. 1984-1985.: Merenje, obrada i analiza pomeranja i deformacija objekta STV-III. Rudarski fakultet, Beograd. (prof. Begović).
98. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacija brane Bovan, Velika Morava, Beograd.
99. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacija brane Čelije. Velika Morava, Beograd.
100. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacija brane Radonjić. Velika Morava, Beograd.
101. AŠANIN, S. 1984-1985.: Obrada i analiza pomeranja i deformacija brane Pridvorice. Velika Morava, Beograd.
102. AŠANIN, S. 1985.: Projekat geodetskih mreža za potrebe odredjivanja deformacija tla grada Tuzle. Institut za geodeziju (prof. Mihailović).



